ISSN0386-8257

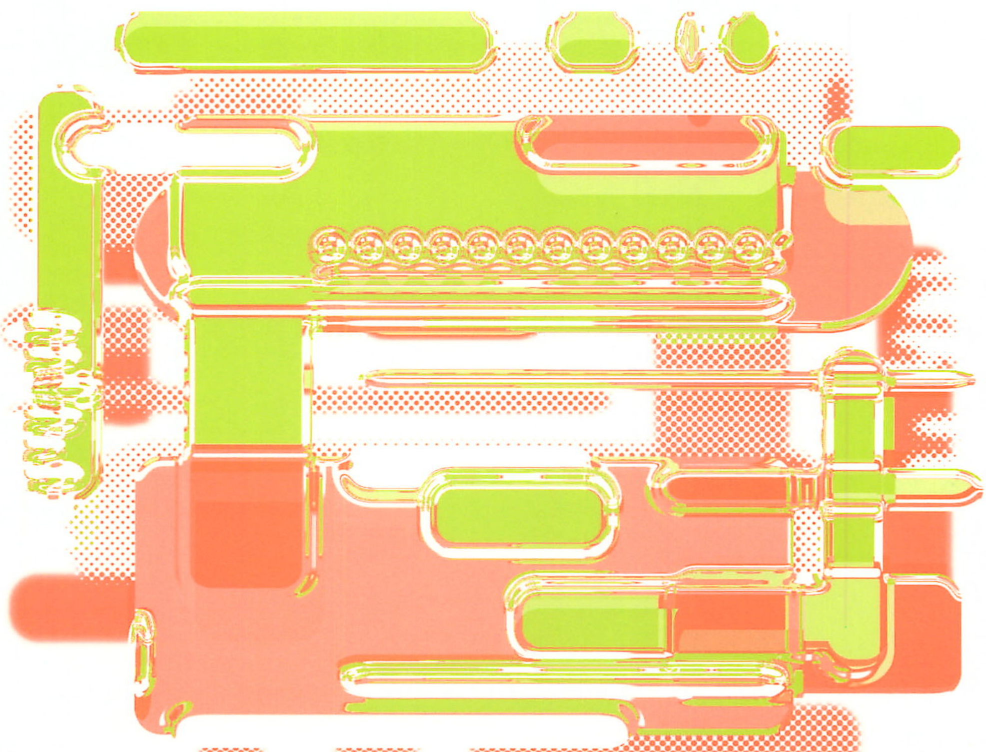
臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
118

For Senior & Graduate Courses

数物系のための
シンプレクティック幾何学入門

◆

植田 一石　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-118

数物系のための
シンプレクティック
幾何学入門

植田 一石　著

サイエンス社

SGC ライブラリ (The Library for Senior & Graduate Courses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

まえがき

この本は主として，物理学や数学を学ぶ学部学生や大学院生に向けて書かれている．しかし，意欲的な高校生や他分野の研究者が読む事も想定して，シンプレクティック幾何の標準的な話題を，なるべく平易に紹介するよう試みた．

物事を説明する時の順序には大きく分けて3つある．歴史的な順序，論理的な順序，そして教育的な順序である．歴史的な順序は，目的地までの最短経路ではない上に，しばしば自明でない飛躍を伴い，その必然性を理解するのは必ずしも容易ではない．論理的な順序は整理されていて無駄が無いが，定義や定理の背後にある積み重ねられて来た叡智が高度な抽象化によって覆い隠されて，初学者は一見すると無味乾燥な記号の羅列の中で惑い彷徨うことになる．一方，教育的な順序では，歴史的あるいは論理的な順序を無視して，心理的負担が少なく，納得し易いと思われる順序で議論を展開する．

この本では，歴史的順序でも論理的順序でもなく，教育的な順序で議論を展開する事を試みた．ただし，どのような議論が動機付けとして説得力を持つかにはかなりの個人差があるので，本書での議論は教育的順序のほんの一例に過ぎない．読者には，それぞれの興味と理解に応じて，本書の内容を自身で再構成することをお勧めしたい．

本書の一部は筆者が国内外の大学や研究所で行った講義や講演を基にしているが，教科書式に書き直すのではなく，講義調の砕けた雰囲気を保つよう心掛けた．この本の内容は前から後ろに向かって緩やかに結び付いているが，概ね章毎に独立して読めるように，重要な概念は，繰り返しを厭わず何度も説明した．また，自習する読者が簡単なことで躓かないよう，計算の過程をくどいくらい詳しく書いた．後ろに行くにつれて必要な予備知識は増えるが，分からない事が出てきても，そこで諦めるのではなく，他の文献などで補いながら読むか，場合によってはそこを保留してとりあえず先に進む事をお薦めしたい．

本書の大まかな構成は次のようになっている．第1章では，シンプレクティック幾何学の歴史や現状，それに各章の背景について述べる．ここはお話であり，予備知識は特に必要ない．第2章では，解析力学の初歩から初めてシンプレクティック幾何学に至る道を教育的順序で辿る．必要な予備知識はなるべく少なくなるよう配慮した．この章の目標を1つだけ挙げるとすれば，対称性と保存則に関する Noether の定理の主張と証明を理解する事であろう．Noether の定理は味わうべき深い定理であり，これを知るためだけでも解析力学を学ぶ価値がある．対称性は群作用に言い換えられて，この本（あるいはシンプレクティック幾何学そのもの）の主題（の一つ）をなす．

第2章の目標をもう1つ挙げるとすれば，シンプレクティック多様体の定義を，その自然さが納得できる形で行う事であろう．ただ，数学における定義は，積み重ねられた歴史によって磨き抜かれた結果として現在の形になっており（位相空間の定義はその典型例である），究極的には良い具体例によってしか正当化されない．

第2章が物理学の視点からのシンプレクティック幾何への導入であるとすれば，第3章と第4章

は数学の立場からのシンプレクティック幾何への導入である．第3章ではG構造の幾何学の視点からシンプレクティック多様体の定義をやり直し，第4章ではシンプレクティック多様体の例を幾つか挙げた．ここまでが序論であり，第5章からが本論である．

第5章ではシンプレクティック幾何学において群作用を取り扱うための枠組みを紹介する．ここで読者は，ベクトル場やLie群などの多様体論で学ぶ諸概念が，生き生きと活躍する様を見るであろう．

シンプレクティック幾何学は解析力学のある意味で究極の定式化として生まれたが，力学の問題は，運動方程式を立てればそれで終わりではなく，たとえ運動方程式が求まっても，その解について何も分からなければ殆ど意味はない．解についてどの程度のことが分かるかは系によって大きく異なるが，考えられ得る限り最も良い状況を定式化したものが完全可積分系の概念である．完全可積分系の一般論はLiouville–Arnoldの定理でほぼ尽きているが，具体例は代数・幾何・解析が交わる豊穣な世界を成し，活発に研究されている．第6章ではこの完全可積分系について，Liouville–Arnoldの定理の概要と，典型的な具体例である戸田格子について，Lie群の分解の立場から紹介する．

可積分系は極めて例外的な存在であり，大抵の運動方程式については，解を良く知られた関数で明示的に表示することはできない．そのような場合でも解について何らかの意味のある結果を得るために，Poincaréは力学系の理論を創始した．第7章では，可積分系に近い力学系を扱うKAM理論と，可積分系から遠い力学系を扱うエルゴード理論について簡単に紹介する．前者は太陽系の安定性，後者は統計力学を動機として生まれたもので，共に物理学と縁の深い理論である．

第8章ではシンプレクティックトーリック多様体と呼ばれる非常に特別なクラスのシンプレクティック多様体を扱う．これは大雑把には，完全可積分系の構造を持つコンパクトなシンプレクティック多様体の中で最も良い（あるいは単純な）ものとして定義される．この分野の基本定理は，シンプレクティックトーリック多様体が適当な条件を満たす凸多面体と1対1に対応するというDelzantの定理である．この定理によって，シンプレクティックトーリック多様体に関する問題は，原理的には全て凸多面体の組合せ論に帰着する．

第9章では2次元のゲージ理論を扱う．2次元のゲージ理論とシンプレクティック幾何学の密接な関係はAtiyah–Bottによって発見され，その後の発展の指導原理となった．この章の目標は，Riemann面上の正則ベクトル束が安定である事と直既約Yang–Mills接続を持つ事が同値であるというNarasimhan–Seshadriの定理の，Donaldsonによる証明を紹介する事である．この定理の高次元化や，ゲージ理論から重力への一般化は，微分幾何学の中心的な問題の1つであった．

第10章では趣向を変えて，複素幾何におけるシンプレクティック構造について紹介する．これは4元数と関わりが深く，実のシンプレクティック幾何とはかなり様相の異なる独特の世界を形成している．コンパクトなものは例が非常に少ないが，コンパクトでないものは場の理論や超弦理論におけるモジュライ空間としてしばしば現れる．

当初の計画では，以上の内容に加えて，現在も活発に研究されている発展的な話題を取り上げる予定であったが，紙数の都合で残念ながら果たせなかった．本書で紹介できなかったその後の発展についてはあとがきで少し触れる．

編集者や同僚，恩師，家族など，多くの人たちのお陰でこの本を世に出せたことに感謝したい．

2015年4月

植田一石

目　次

第 1 章
序章

この章では，シンプレクティック幾何学について物語風に綴る事で，この本で取り上げる様々な主題についての導入を行う．各々の主題のより正確な内容については，対応する章の冒頭でより詳しく述べる．

1.1 幾何学と物理学

Platon がアテネ近郊に設立した「アカデメイア」の門には「幾何学を知らざるものはこの門をくぐるべからず」という額が掲げられていたと言う．ギリシャ時代に，幾何学は全ての学問の中で特別な地位を占めていた．イデア界の影たるこの世界において，完全な直線や完全な円たちのなす幾何学は，イデア界を垣間見るための鏡であったのだろうか．

ギリシャ時代の最も傑出した数学者は疑う余地無く Archimedes である．紀元前 3 世紀に生まれながら，彼は時代を遥かに超越しており，静力学を事実上完成した上に，積分法に関しても，その端緒となる深い洞察を行っていた．また，実用を極度に軽んじる文化の中にあって，有能な工学者でもあった．しかし，彼が生涯で最も愛したのは幾何学である．自身の墓石には，円柱とそれに内接した球の図を彫るよう言い遺したと伝えられている．

しかし，彼はついに動力学を理解することはなかった．16 世紀になってようやく Galilei が，力が速度ではなく加速度に関係すること，力が働いていない物体は等速直線運動をすること，そして，重力のみが働いている状況では重いものも軽いものも同じように落下することを正しく見抜いた．我々の経験に基づく直感は摩擦の効果によって曇らされており，真空中で羽毛と鉛球が同時に落下することは，今日の我々にとってすら軽い驚きである．

しかし，あと一歩の所まで行きながら，Galilei は遂に運動の法則を理解する事はなかった．彼に欠けていた微分積分学を創始して運動の法則を完成したのは，当代随一の科学者にして数学者の Newton である．彼は距離の 2 乗に反比

例する力が惑星の運動に関する Kepler の法則を導くことを示した．

Newton による運動の法則の定式化は近代科学の夜明けを告げた．その最も輝かしい成果は Halley らによる周期 75 年の彗星の軌道計算であろう．彗星が Newton 力学の予言通りに回帰した事によって，Newton 力学が地上の物理だけでなく天体の運動に関しても強力な予言能力があることが確かめられた．地球から太陽までは，時速 4km で 24 時間 365 日歩き続けても 4000 年以上かかるが，この日常と掛け離れた天文学的なスケールで天体の運動を支配している法則は，地上で我々が投げたボールの軌跡を支配する法則と同じなのである．

Newton の仕事は「自然哲学の数学的諸原理」と題された本に纏められた．この本は極めて幾何学的である．ここでの「幾何学」はギリシャ人のそれであり，今では失われた円錐曲線に関する様々な結果を用いるので，現代人は注釈無しでは読むことができない．

「自然哲学の数学的諸原理」が難解なのは現代人に限った話ではなく，同時代人にとってもそうであった．しかし，数学では本来全てが自明であるべきであり，難解なのはしばしばそれを記述するための言語が適切でない事が原因である．

Newton の後継者たちは幾何学的な世界に背を向けて，力学の解析的な理論の建設に邁進した．その最初の到達点が Lagrange による解析力学であり，そこで彼は力学から全ての「図」を追放したことを高らかに宣言した．幾何学的直感を離れて式とその代数的な操作の世界に入ることによって，力学の問題の定式化とその解決は，閃きの必要な創造的事業から機械的な単純作業へと変わった．微分積分学や力学は学生の必修科目になり，全てのエンジニアの標準的な道具となった．

しかし，幾何学と物理学の失われた絆は，20 世紀に入って遥かに強い形で復活する．その 1 つが特殊および一般相対論であり，Minkowski 幾何および擬 Riemann 幾何と分かち難く結び付いている．

また，電磁気学や量子色力学に代表されるゲージ理論も，主束とその接続の言葉で自然に記述される，極めて幾何学的な理論である．

それとは別の流れとして，解析力学の幾何化がある．解析力学の背後に何らかの幾何学的な世界が拡がっているという認識は，19 世紀から徐々に形作られ，20 世紀に入ってより明確になった．やがて Weyl が「シンプレクティック」という言葉を発明し，Cartan が Klein の Erlangen 目録を拡張する形で G 構造の幾何学を創始した．シンプレクティック多様体はこの G 構造の幾何学の文脈で自然に定義される．

これらの様々な流れは分岐と合流を繰り返しながら成長し，今や大河となって数学や物理学の幅広い分野に影響を与えている．シンプレクティック幾何学は，明確な中心を持たないまま巨大な分野に成長してしまったので，概観するのは難しいが，主要な話題としては以下のようなものが挙げられよう．

1.2 群作用

系が対称性を持つと，実質的な自由度が減って問題が取り扱い易くなる．系の持つ対称性を自然に取り扱う為の一般的な枠組みを作ることは，シンプレクティック幾何学の発展の原動力の一つであった．対称性と保存則が本質的に同一のものである事を主張する Noether の定理は，その一つの到達点であり，その後の発展の出発点でもある．Noether の定理は，真に偉大な定理の特徴である

- 主張は深遠で，多くの帰結を持つこと
- 証明が自明であること

の双方を備えている．また，シンプレクティック幾何学の枠組みを超えて，古典力学と量子力学の双方で成り立つ事も顕著な特徴であり，その意味で，同じく古典論と量子論の枠を超えて成り立つ熱力学などと同様に，人類の到達点を示しているとも言えよう．

系の対称性は，群作用に関する不変性として自然に定式化される．対称性が連続的な時には，現れる群は Lie 群になる．Lie 群や Lie 環はシンプレクティック幾何学と独立に定義されるが，シンプレクティック幾何学は Lie 群や Lie 環の概念が有効に活用される格好の具体例を提供する．これは次項で述べる可積分系において特に顕著である．また逆に，Lie 群の余随伴軌道はシンプレクティック多様体の重要な例を与える．

Hamilton 系の対称性の文脈で特に重要なのは，Lie 群のシンプレクティック多様体に対する Hamilton 作用の概念である．シンプレクティック多様体の Hamilton 作用による商を考える事で，自然にシンプレクティック商の概念に到達するが，これは代数幾何における幾何学的不変式論と極めて密接に関係する．

1.3 可積分系

勝手に Hamilton 系を与えた時，運動方程式の厳密解が具体的に式で書けることは稀であり，大抵の方程式は「解けない」．そこで，方程式が「解ける」のはいつかという事が自然に問題になる．

運動方程式に限らず，問題が「解ける」ことの正確な定式化は，昔から数学の重要なテーマであり，現在もそうあり続けている.「解けない」問題の代表例は，所謂ギリシャの三大作図問題であろう:

- 角の三等分問題 (trisecting the angle)
- 立方体倍積問題 (doubling the cube)
- 円積問題 (squaring the circle)

これらはもちろん適切な道具を使えば解ける（例えば，折り紙を使えば角の三等分と立方体の倍積はできる）が，使う道具を制限すれば解けなくなる．古典的にはコンパスと定規のみが許されており，ギリシャ時代から研究されてきたが，

19世紀になってようやく不可能であることが証明された.「解けない」問題のもう一つの代表例は5次方程式の解の公式に関するものであり，Ruffini，Abelを経てGaloisによって完全な形で解決した．方程式のGalois理論はDedekind, Kroneckerなどの貢献を経て，Artinによって体のGalois理論として完成され，大学の標準的なカリキュラムに組み込まれている．体のGalois理論はその後，被覆のGalois理論と統合され，Grothendieckによって徹底的に抽象化されて現在に至っている．

話をHamilton系に戻そう．Hamilton系の持ち得る可換な対称性はたかだか次元の半分までだが，この限界一杯の対称性がある系を完全可積分系と呼ぶ．完全可積分性は系が「解ける」ことの定式化の一つであるが，この場合の系の構造を記述するのがLiouville–Arnoldの定理である．この定理は

- 系が次元の半分の個数の可換な対称性を持ち，
- 初期値が保存量の正則点であり，
- 等位集合がコンパクトである

という3つの仮定から，

- 等位集合はLagrangeトーラスであり，
- 作用・角座標と呼ばれる特別な座標が存在して，
- 系の運動は作用座標方向には定数で，角座標方向には等速直線運動になる

という結論を導く．

Liouville–Arnoldの定理は完全可積分系の構造に関する強力かつ決定的な定理で，完全可積分系の抽象的な一般論としては，これに付け加えるべき事はあまりない．従って，可積分系の研究は必然的に各論になる．可積分系としては様々なものが知られているが，孤立した例だけでなく，様々な背景を持って組織的に構成される例もある．その代表例としては戸田格子があるが，これはLie環やYang-Baxter方程式，Lax方程式といった様々な話題と関連して興味深い．

1.4 力学系

可積分系は美しくかつ重要なテーマだが，与えられたHamilton系が可積分であることは極めて稀である．可積分でない系の性質を定性的に調べるために，Poincaréは力学系とトポロジーの理論を創始した．この分野の指導的な問題は太陽系の安定性であり，KAM(Kolmogorov–Arnold–Moser)理論に結実した．質点系の力学としての太陽系の安定性を問題にするのは，一般相対論的効果を入れると重力波の放出がある事や，実際には太陽や惑星は点粒子ではなく，Newton力学においても潮汐力によって散逸が起こる事，太陽に寿命がある事，また，宇宙項無しの一般相対論ではそもそも宇宙が定常であり得ない事などを考えると奇妙に見えるが，この問題がかなりの興味を集めたのは歴史的事実である．また，これに関連してArnoldは，周期Hamilton系の周期解の個数を

相空間の位相幾何的な不変量で下から押さえる Arnold 予想を提出し，これがその後のシンプレクティック・トポロジーの発展を促す原動力になった．

KAM 理論は可積分系に近い Hamilton 系を取り扱うが，可積分系から遠い Hamilton 系に対して威力を発揮するのがエルゴード理論である．エルゴード理論においては，個々の初期値に対する時間発展を追跡するのを諦め，系の長時間における平均的な挙動を問題にする．エルゴード理論の礎石を成すのが，Liouville の定理である．この定理は Hamilton 系の時間発展がシンプレクティック形式から定まる自然な測度に関して保測変換である事を主張し，その証明は Noether の定理以上に自明である．だが，時間発展の保測性は，再帰定理やエルゴード定理などの重要な定理の前提条件であり，Liouville の定理は決してつまらない定理ではない．むしろ，Liouville の定理の証明が自明である事が，シンプレクティック幾何学を用いて古典力学を記述する事の正当性の根拠の一つであり，古典力学に対する我々の理解の深さを物語っていると言えよう．

1.5 量子化

本書では扱わないものの，現代のシンプレクティック幾何学は，量子化との関連を抜きにして語ることはできない．シンプレクティック幾何は古典力学の美しく，洗練されていて，しかも実用的な記述を与えるための枠組みを提供する．一方，量子力学は古典力学を越える自然のより根源的な記述を与える理論なので，古典力学から量子力学への以降に際しては，シンプレクティック幾何学を捨て去って，全く別の新しい枠組みを用いる事になっても良さそうである．だが，不思議なことに現実はそうなっていない．むしろ，量子化の問題によって，シンプレクティック幾何の重要性は益々増大している．ある分野を乗り越えて行くには，その分野を極めなければならないという事であろうか．さらに 20 世紀後半になって，ゲージ理論や超弦理論との関係が探求されるようになり，シンプレクティック幾何学の研究はますます盛んになっている．将来的にはシンプレクティック幾何学は絶滅して「量子幾何学」を研究するようになり，時折その古典極限として言及されるのみになるかもしれないが，これが実現して，シンプレクティック幾何学が数学史の分野でのみ研究されるようになるのは，まだまだ先の事になりそうである．

第 2 章
解析力学

解析力学は200年以上の歴史を持ち，シンプレクティック幾何学の故郷である．解析力学からシンプレクティック幾何学への流れを実際の歴史に沿って概説する事はここでは試みない．一方，非退化閉 2 次微分形式を持つ多様体としてシンプレクティック多様体を定義して，そこから議論を始めることもできる．これは数学では標準的であるが，ここではその道も取らない．この章では，解析力学から話を始め，シンプレクティック多様体よりも必然性が理解しやすいと思われる Poisson 多様体を定式化した後，その特別な場合としてシンプレクティック多様体を導入することにする．

2.1 Newton の運動の法則

質点系の古典力学に関する **Newton の運動の法則** (Newton's laws of motion) は次の 3 つからなる:

第一法則 力の働いていない質点は等速直線運動をする．

第二法則 質点に力が働いている時，その質点の加速度は，その質点に働く力の和に比例し，その質点の質量に反比例する．

第三法則 質点 A が質点 B に力を及ぼす時，質点 B もまた質点 A に同じ大きさで向きが逆の力を及ぼす．

第一法則では「等速直線運動」と述べたが，その意味を確定するには座標系を選ばなくてはならない．Newton 力学において，力の働いていない質点が等速直線運動をするような座標系を **Galilei 座標系** (Galilean reference frame) と呼ぶ．第一法則は，Galilei 座標系の存在を主張している．

第二法則は 3 つの運動の法則の中で最も重要であり，しばしば **Newton の運動方程式** (Newton's equation of motion)

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{2.1.1}$$

の形で述べられる．ここで m は質点の質量 (mass)，$\boldsymbol{F}$ は質点に働く力 (force)，そして $\boldsymbol{x}$ は Galilei 座標系における質点の位置 (position) である．第二法則を記述するためには，その前提として Galilei 座標系の存在を保証する第一法則が必要であることは言うまでもない．

第三法則は作用反作用の法則を述べており，運動量保存則と同値である．後述する Noether の定理によれば，これは系の並進不変性（あるいは空間の一様性）と同値である．

運動の法則をこのように定式化するのは，哲学的にも実用上も極めて不満足である．哲学的に不満な最大の理由は，この定式化だと「力」というのが何なのか不明なことである．Galilei 座標系で見て質点が等速直線運動をしていない時に，その質量と加速度を乗じたものを「力」と定義してもよいが，それだと第二法則は何も言っていないことになる．従って，Newton の運動の法則とは別に力の法則が必要で，それが例えばバネに関する Hooke の法則であったり，Newton の万有引力の法則であったり，点電荷の相互作用に関する Coulomb の法則であったりする．

一方，実用上の不満で最大のものは，使える座標系が Galilei 座標系に固定されていることである．多くの系には対称性があって，その系の対称性に則した座標を取ることで，理論的に見通しがよくなり，計算も簡単になる．Newton 形式の古典力学だと，まず Galilei 座標を使って運動方程式を書いた後，それを好みの座標に変換しなければならない．

また，対称性と保存則に関する Noether の定理は，解析力学を用いて初めて自然に述べられる．第三法則は運動量保存則と同値だが，Noether の定理によると，運動量保存則は系が空間並進に関する対称性を持っている（つまり,「物理が平行移動で不変である」）ことと同値である．この事実を Newton の運動の法則から見て取るのはほとんど不可能である．

何はともあれ，幾つかの簡単な例について，Newton の運動方程式を記述してみよう．

2.1.1 単振動

図 2.1 のように空中にバネで吊るされた重りの上下運動を考える．時刻 t での重りの位置を $x = x(t)$ とおくと，この時の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - mg \tag{2.1.2}$$

となる．ただし，m は重りの質量 (mass)，k はバネ定数 (stiffness)，g は重力加速度 (gravitational acceleration) である．時刻 t と位置 x の単位を適当に取れば，この方程式は

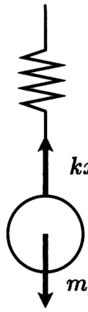


図 2.1　単振動.

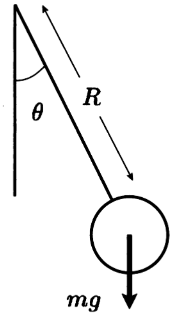


図 2.2　単振り子.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - 1 \tag{2.1.3}$$

となるが，ここでさらに $y = x + 1$ とおくことによって，運動方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y \tag{2.1.4}$$

と書ける．これは 2 階の線形微分方程式で，解空間は $\sin t$ と $\cos t$ で張られる 2 次元の線形空間になっている．このような運動を**単振動** (simple harmonic motion) と呼ぶ．

2.1.2　単振り子

図 2.2 のように半径 R の円周上を動く重りを**単振り子** (simple gravity pendulum) と呼ぶ．鉛直方向から θ だけずれた重りに働く力は，θ 方向には $mg\sin\theta$ であり，運動方程式は，

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{2.1.5}$$

である．単位系を適当に選んで $m = R = g = 1$ とし，両辺に $\dot{\theta}$ を掛けると

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\sin\theta\dot{\theta} \tag{2.1.6}$$

となる．この両辺を t で積分して

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \cos\theta + E \tag{2.1.7}$$

を得る．ここで E は積分定数である．

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta \tag{2.1.8}$$

と書き換えると，これはエネルギー保存則である．これを

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2(\cos\theta + E)} \tag{2.1.9}$$

と書くと，変数分離形になっているので，

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta + E)}} = dt \tag{2.1.10}$$

として，

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta + E)}} = t \tag{2.1.11}$$

となる．これによって t が θ の関数として求まり，t の関数としての θ はその逆関数として与えられる．積分 (2.1.11) は楕円積分であり，その逆関数は楕円関数になる．方程式が非線形なので解空間は線形空間ではないが，常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性により，初期値（時刻 $t = 0$ における θ と $\dot{\theta}$ の値）によってパラメトライズすることができる．すなわち，解空間は $S^1 \times \mathbb{R}$ である．

2.1.3 Kepler 問題

上の 2 つの問題は 1 次元の空間を運動する 1 つの質点の問題であった．運動方程式は 2 階の常微分方程式なので，解空間の次元は 2 になる．ここでは重力相互作用をしながら 3 次元の空間を運動する 2 つの質点を考えよう．この場合の解空間の次元は 12 になり，これまでの例よりも格段に大きい．しかし，この系には大きな対称性（これは Noether の定理によって保存則と同値である）があるので，最終的には 2 次元の問題に帰着する．

運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{d^2t} = -m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3}, \tag{2.1.12}$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{d^2t} = -m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|^3} \tag{2.1.13}$$

で与えられる．ここで，重心の座標 $\boldsymbol{x}'$ と相対位置 $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}' = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.1.14}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \tag{2.1.15}$$

で導入すると，運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{x}}' = 0, \tag{2.1.16}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \tag{2.1.17}$$

と書き直される．ここで

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.1.18}$$

は調和平均の半分であり，**換算質量** (reduced mass) と呼ばれる．(2.1.16) は重心が等速直線運動を行うことを示している．一方，(2.1.17) は固定された質点

によって生じる重力場の中を運動する 1 つの質点を記述する運動方程式である．単位系を適当に選んで，これを

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \tag{2.1.19}$$

の形に書いておく．

3 次元のベクトルの**外積** (cross product) は，

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \tag{2.1.20}$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \tag{2.1.21}$$

に対し

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{2.1.22}$$

で与えられるのであった．これを用いて**角運動量** (angular momentum) を

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.1.23}$$

で定義すると，

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \dot{\boldsymbol{x}} \times \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \times \ddot{\boldsymbol{x}} \tag{2.1.24}$$

$$= 0 + \boldsymbol{x} \times \left(-\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\right) \tag{2.1.25}$$

$$= 0 \tag{2.1.26}$$

となるので，角運動量が保存されることが分かる．ここで，Leibniz 則

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \dot{\boldsymbol{b}} \tag{2.1.27}$$

と外積の性質

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0 \tag{2.1.28}$$

を使った．対称性と保存則の関係に関する Noether の定理は，角運動量保存則 $\dot{\boldsymbol{M}} = 0$ が系の回転対称性と同値であることを主張する．

外積の定義 (2.1.22) から直ちに従う

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{2.1.29}$$

によって，角運動量 $\boldsymbol{M} := \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ および $\dot{\boldsymbol{x}}$ の双方と直交することが分かる．角運動量が保存されることから，$\boldsymbol{x}$ は常に $\boldsymbol{M}$ と直交する平面内にとどまることが分かる．この平面に極座標を導入して，

$$\boldsymbol{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \tag{2.1.30}$$

と書くと，角運動量は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &:= \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \times (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}, 0) \\
&= (0, 0, r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\dot{\theta} - r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta\dot{\theta}) \\
&= (0, 0, r^2\dot{\theta})
\end{aligned}
\tag{2.1.31}
$$

と表される．

運動方程式 (2.1.19) の両辺と $\dot{\boldsymbol{x}}$ の内積を取ると

$$
\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.1.32}
$$

となるが，これは容易に積分できて，

$$
\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + E \tag{2.1.33}
$$

を得る．ここで，積分定数を E とおいた．実際，(2.1.33) を微分すれば，ベクトルの内積に関する Leibniz 則

$$
\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \dot{a} \cdot b + a \cdot \dot{b} \tag{2.1.34}
$$

および多変数の微分に関する**連鎖律** (chain rule)

$$
\frac{d}{dt}(f(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \mathbf{grad}\, f \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.1.35}
$$

を用いて直ちに (2.1.32) を得る．E は積分定数なので，時間に依存しない定数であるが，これを系の**エネルギー** (energy) と呼ぶ．(2.1.32) を

$$
E = \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 - \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \tag{2.1.36}
$$

と書いて，**エネルギー保存則** (energy conservation law) と呼ぶ．Noether の定理によって，エネルギー保存則は時間並進に関する系の不変性と同値になる．

(2.1.30) を t で微分して得られる

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}, 0), \\
|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 &= \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \\
&\qquad + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} + r^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 \\
&= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

を用いて (2.1.36) を極座標で書くと

$$
E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r} \tag{2.1.37}
$$

となる．ここに (2.1.31) から来る

$$
\dot{\theta} = \frac{M}{r^2} \tag{2.1.38}
$$

を代入すると

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{M^2}{r^2}) - \frac{1}{r} \tag{2.1.39}$$

となり，

$$\dot{r} = \sqrt{2\left(E + \frac{1}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} \tag{2.1.40}$$

を得る．これを積分すれば

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{2\,(E + 1/r) - M^2/r^2}} \tag{2.1.41}$$

となる．また，

$$d\theta = \frac{M}{r^2}dt = \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2\,(E + 1/r) - M^2/r^2}} \tag{2.1.42}$$

となるが，$r = 1/s$ とおくと $dr = -r^2 ds$ であり，

$$d\theta = \frac{M ds}{\sqrt{2\,(E + s) - M^2 s^2}} \tag{2.1.43}$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{(2E/M^2 + 1/M^4) - (s - 1/M^2)^2}} \tag{2.1.44}$$

となる．ここで，全体の符号は平方根の不定性に吸収した．これを積分して

$$\theta = \arccos \frac{(s - 1/M^2)}{\sqrt{2E/M^2 + 1/M^4}} + (\text{積分定数}) \tag{2.1.45}$$

$$= \arccos \frac{M^2/r - 1}{\sqrt{2EM^2 + 1}} + (\text{積分定数}) \tag{2.1.46}$$

を得る．ここで，θ の原点を適当に選ぶことによって積分定数を 0 にし，

$$e = \sqrt{1 + 2EM^2} \tag{2.1.47}$$

とおくと，(2.1.46) は

$$\cos\theta = \frac{M^2/r - 1}{e} \tag{2.1.48}$$

となる．ここでさらに

$$l = M^2/e \tag{2.1.49}$$

とおけば，

$$e\cos\theta = M^2/r - 1 = el/4 - 1 \tag{2.1.50}$$

となり，

$$er\cos\theta = el - 1 \tag{2.1.51}$$

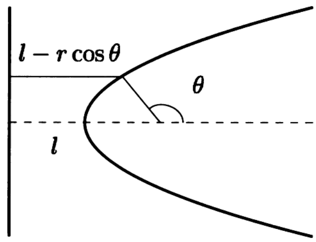


図 2.3　円錐曲線.

から

$$e = \frac{r}{l - r\cos\theta} \tag{2.1.52}$$

を得る．これは図 2.3 にあるように，e を離心率 (eccentricity)，l を焦点 (focus) から準線 (directrix) までの距離 (focal parameter) とするような円錐曲線である．

2.2　Lagrange 形式の解析力学

Newton の運動の法則を直接用いて運動方程式を書き下すのは，Galilei 座標系を用いる必要性からしばしば面倒である．これは，系が複雑な拘束条件を持っている時に特に顕著になる．Lagrange 形式の解析力学は，運動の法則を**変分原理** (variational principle) を用いて書き直すことによって，この問題に対する優雅なアプローチを与える．

2.2.1　変分原理

微分法によって関数の極値を求めることができるが，これを無限次元にしたものが変分法である．変分原理の嚆矢は幾何光学における Fermat の原理である：

Fermat の原理　光は光学距離が最小になる経路を進む．

$\mathbb{R}^3$ を一様でない媒質が満たしていて，その屈折率は位置の関数 $n(x)$ で与えられるとする．2 点 $p, q \in \mathbb{R}^3$ を結ぶ経路全体の集合を

$$\mathcal{P}(p,q) = \left\{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\right\} \tag{2.2.1}$$

とおく．ここで，経路 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ には区分的な滑らかさなどの合理的な条件を課しているとする．この時，経路 γ の距離は

$$\ell[\gamma] = \int_0^1 ds \tag{2.2.2}$$

で与えられる．ただし，経路 γ を成分で表示したものを $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$ とおく時，微小線要素 ds は

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\gamma_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_z}{dt}\right)^2}\, dt \tag{2.2.3}$$

で定義される．経路に対してその距離を対応させる写像

$$\ell\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R} \tag{2.2.4}$$

は，経路の空間の上の関数である．各々の経路はそれ自身が関数 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ なので，ℓ は「関数の関数」(つまり，関数たちのなす空間上で定義された関数) である．一般に,「関数の関数」のことを**汎関数** (functional) と呼ぶ．距離 ℓ は汎関数の代表的な例である．よく知られているように，$\mathbb{R}^3$ の 2 点を結ぶ最小の経路は，その 2 点を通る線分で与えられる．

一方，光学距離は

$$S[\gamma] = \int_0^1 n\, ds \tag{2.2.5}$$

で定義される．例として，$\mathbb{R}^3$ 内の上半空間 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{>0}$ と下半空間 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{<0}$ を異なる媒質が満たしていて，境界 $\mathbb{R}^2 \times 0$ では屈折率が不連続に変化しているような状況を考える．上半空間上の点と下半空間上の点が与えられた時，その 2 点を結ぶ区分的に滑らかな経路の中で光学距離 (2.2.5) を最小にするものは，Snell の法則

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{2.2.6}$$

によって特徴付けられるような 2 つの線分の合併集合である．ここで n_1 および n_2 は上半空間と下半空間における屈折率であり，θ_1 と θ_2 は上半空間と下半空間における入射角である．後に，Foucault や Fizeau らに始まる実験によって，屈折率は媒質中の光速に反比例することが分かった．従って，Fermat の原理は，光は時間が最短になる経路を進むと言い換えることもできる．

2.2.2 Euler–Lagrange 方程式

多様体 W と始時刻 t_0，終時刻 t_1，それに初期位置 $q_0 \in W$ と終位置 $q_1 \in W$ を固定して，経路の空間

$$\mathcal{P} = \{\gamma\colon [t_0, t_1] \to W \mid \gamma(t_0) = q_0,\ \gamma(t_1) = q_1\} \tag{2.2.7}$$

上の汎関数が，W の接束 TW 上の関数 $L\colon TW \to \mathbb{R}$ を用いて

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot\gamma) dt \tag{2.2.8}$$

で与えられている場合を考えよう．この W を**配位空間** (configuration space), L を **Lagrange 関数** (Lagrangian), S を**作用汎関数** (action functional) と呼ぶ．W の局所座標 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を取って,

$$\varphi \circ \gamma = \boldsymbol{q} = (q^1, \dots, q^n)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n \tag{2.2.9}$$

と書く．境界条件

$$\delta \boldsymbol{q}(t_0) = \delta \boldsymbol{q}(t_1) = 0 \tag{2.2.10}$$

を満たす任意の関数 $\delta \boldsymbol{q}\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ に対し，汎関数の**変分** (variation)

$$\delta S := S[\boldsymbol{q} + \delta \boldsymbol{q}] - S[\boldsymbol{q}] \tag{2.2.11}$$

の δq に関して 1 次の項は

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{q}} \right) dt \tag{2.2.12}$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \boldsymbol{q} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{q} \right) dt \tag{2.2.13}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) \right) \cdot \delta \boldsymbol{q} \, dt \tag{2.2.14}$$

で与えられる．ここで，部分積分によって現れる表面項が境界条件 (2.2.10) によって消えることを使った．**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculus of variations) から，

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t) dt = 0 \tag{2.2.15}$$

が任意の関数 $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ に対して成り立つための必要十分条件は $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が恒等的に 0 であることなので，$\boldsymbol{q}$ の任意の変分 $\delta \boldsymbol{q}$ に対して S の変分 δS が消えるためには，$\boldsymbol{q}$ が **Euler–Lagrange 方程式** (Euler–Lagrange equation)

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) = 0 \tag{2.2.16}$$

を満たしていなければならない事が分かる．

Lagrange 形式の解析力学では，物理系は配位空間 W と Lagrange 関数 $L\colon TW \to \mathbb{R}$ を与えることによって指定され，系の運動は作用の停留点，すなわち変分 δS が消える経路として実現される．配位空間を指定することによって運動の舞台が決まり，Lagrange 関数を指定することによって運動の法則と力の法則が同時に決まるわけである．Lagrange 関数は，作用の停留点（すなわち，Euler–Lagrange 方程式の解）が観測される実際の運動と合うように決められるが，簡単な場合には，系の運動エネルギー K およびポテンシャルエネルギー V を用いて

$$L = K - V \tag{2.2.17}$$

で与えられる．

注意 2.2.1. Lagrange 関数が接束 TW ではなく，2 より大きな自然数 k に対する k 階のジェット束 (k-th jet bundle) J_kW 上の関数であるような理論（高階微分の理論）を考えることもできる．しかし，そのような理論はここでは取り扱わない．

ここで，先に挙げた例に対して Lagrange 関数を見てみよう．

例 2.2.2 (単振動). $W = \mathbb{R}$ であり，$TW \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の座標を (x, v) とおいた時，Lagrange 関数は

$$L(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mgx \tag{2.2.18}$$

で与えられる．

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx - mg, \tag{2.2.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = mv \tag{2.2.20}$$

なので，Euler–Lagrange 方程式は

$$(-kx - mg) - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \tag{2.2.21}$$

となる．

例 2.2.3 (単振り子). $W = S^1$ であり，$TW \cong S^1 \times \mathbb{R}$ の座標を (θ, ω) とおいた時，Lagrange 関数は

$$L(x,v) = \frac{1}{2}m(R\omega)^2 + mgR\cos\theta \tag{2.2.22}$$

で与えられる．

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta, \tag{2.2.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = mR^2\omega \tag{2.2.24}$$

なので，Euler–Lagrange 方程式は

$$mgR\sin\theta + \frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{2.2.25}$$

となる．

例 2.2.4 (Kepler 問題). $W = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ であり，TW の座標を $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ とおいた時，Lagrange 関数は

$$L(x,v) = \frac{1}{2}m_1 |\dot{\boldsymbol{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2 |\dot{\boldsymbol{x}}_2|^2 + \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|} \tag{2.2.26}$$

で与えられる．重心の位置

$$\boldsymbol{x}' = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.2.27}$$

と相対座標

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \tag{2.2.28}$$

によって

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \tag{2.2.29}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \tag{2.2.30}$$

と書けるので，Lagrange 関数 (2.2.26) は

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left|\dot{\boldsymbol{x}}\right|^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left|\dot{\boldsymbol{x}}'\right|^2 + \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{x}|} \tag{2.2.31}$$

と書ける．

2.2.3 運動量の保存則

Newton 形式の力学と比べた時の，Lagrange 形式の解析力学の利点の一つとして，運動量の保存則を取り上げよう．ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，Lagrange 関数 L が q^i にあらわに依らない時，すなわち

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{2.2.32}$$

を満たす時，q^i を**循環座標** (cyclic coordinate) と呼ぶ．この時，Euler–Lagrange 方程式から直ちに

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \tag{2.2.33}$$

が従う．

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.2.34}$$

は座標 q^i の**共役運動量** (conjugate momentum) と呼ばれる．(2.2.33) は，巡回座標に共役な運動量は保存されることを示している．ある座標が巡回座標であることは，系がその座標に関する平行移動で不変であることを示している．後述するように，運動量 p_i は平行移動

$$\begin{aligned} q &= (q^1, \ldots, q^{i-1}, q^i, q^{i+1}, \ldots, q^n) \\ &\mapsto q' = (q^1, \ldots, q^{i-1}, q^i + a, q^{i+1}, \ldots, q^n) \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

を生成 (generate) しており，これによって系が不変である事と，この運動量が保存される事が同値になる．

2.3 Legendre 変換

ベクトル空間 V 上の関数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ が**強凸** (strictly convex) とは，任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ と $t\in(0,1)$ に対して

$$f((1-t)\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w})<(1-t)f(\boldsymbol{v})+tf(\boldsymbol{w}) \tag{2.3.1}$$

が成り立つことを指す．$\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数 f が強凸であるための必要十分条件は，Hesse 行列 $\mathrm{Hess}(f)=(\partial_i\partial_j f)_{i,j=1}^n$ が正定値（すなわち，全ての固有値が正）であることである．この時，写像

$$df\colon V\to V^*,\quad \boldsymbol{v}\mapsto(df)_{\boldsymbol{v}}\in T^*_{\boldsymbol{v}}V\cong V^* \tag{2.3.2}$$

は単射になる．この写像を座標で書くと

$$\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{p}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}} \tag{2.3.3}$$

となる．この写像の逆写像を $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ と書き，f の **Legendre 変換** (Legendre transform) を

$$f^*\colon V^*\to\mathbb{R},\quad \boldsymbol{p}\mapsto\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})) \tag{2.3.4}$$

で定義する．この時，

$$\frac{\partial f^*}{\partial\boldsymbol{p}}=\frac{\partial(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{p}} \tag{2.3.5}$$

$$=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{p}} \tag{2.3.6}$$

$$=\boldsymbol{v} \tag{2.3.7}$$

であり，

$$f^{**}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}-f^*(\boldsymbol{p}) \tag{2.3.8}$$

$$=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-f(\boldsymbol{v})) \tag{2.3.9}$$

$$=f(\boldsymbol{v}) \tag{2.3.10}$$

となる．すなわち，Legendre 変換は 2 回行うと元に戻る．

2.4 Legendre–Fenchel 変換

Legendre 変換のより概念的な理解は，**Legendre–Fenchel 変換** (Legendre–Fenchel transform) によって与えられる．これは Legendre 変換の凸とも滑らかとも限らない関数への一般化である．ベクトル空間 V 上の関数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ に対し，その Legendre–Fenchel 変換 $f^*\colon V^*\to\mathbb{R}$ は，$\boldsymbol{p}\in V^*$ を

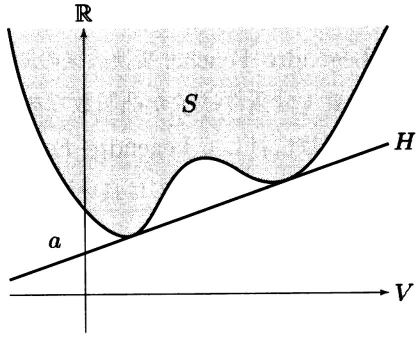


図 2.4　支持超平面.

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \sup_{\boldsymbol{v}\in V} (\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}\rangle - f(\boldsymbol{v})) \tag{2.4.1}$$

に送る写像として定義される.

関数 f に対し，$V \times \mathbb{R}$ の部分集合 S を

$$S := \{(\boldsymbol{v}, x) \in V \times \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{v}) \le x\} \tag{2.4.2}$$

で定義する．集合 S の**支持超平面** (supporting hyperplane) とは，$V \times \mathbb{R}$ の超平面 H で，S と交わり，しかも $V \times \mathbb{R} \setminus H$ の 2 つの連結成分の少なくとも一方は S と交わらないようなものを指す．支持超平面 H が，あるアファイン関数

$$g\colon V \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + a \tag{2.4.3}$$

のグラフとして表されると仮定する:

$$H = \{(\boldsymbol{v}, x) \in V \times \mathbb{R} \mid x = g(\boldsymbol{v})\}. \tag{2.4.4}$$

但し，$\boldsymbol{p} \in V^*$ は g の傾き，a は g の原点での値である．支持超平面の定義から，ある $\boldsymbol{v}_0 \in V$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{v}_0) = g(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}_0 + a \tag{2.4.5}$$

となる．任意の $\boldsymbol{p} \in V^*$ に対し，傾きが $\boldsymbol{p}$ の支持超平面はもし存在すれば一意的である．S を含む最小の凸集合を S の**凸包** (convex hull) と呼び，$\mathrm{Conv}(S)$ で表す．これは具体的には，S の任意の 2 点に対し，その 2 点を通る線分を S に付け加えて得られる:

$$\mathrm{Conv}(S) = \{(1-t)p + tq \mid p, q \in S \text{ かつ } t \in [0,1]\}. \tag{2.4.6}$$

定義から明らかに，S の支持超曲面全体の集合は S の凸包にしか依らない．この時の $-a$ を $\boldsymbol{p}$ の関数と見たものが f の Legendre–Fenchel 変換である．この Legendre–Fenchel 変換に対し，

- 滑らかな凸関数の Legendre–Fenchel 変換は Legendre 変換と一致する

- f^* は必ず凸関数になる
- Legendre–Fenchel 変換の後の関数 f^* から元の関数 f が復元できるための必要十分条件は f が凸関数であることである
- 凸関数に対して Legendre–Fenchel 変換を 2 回行うと元に戻る

などの性質を確かめるのは良い演習問題である．

2.5 Hamilton 形式の解析力学

Lagrange 関数が

- TW 上の関数である（すなわち，経路の 1 階までの微分にしか依らない）
- TW の各ファイバーへの制限は強凸である

の 2 つの性質を持つ時，Lagrange 関数 $L\colon TW \to \mathbb{R}$ を TW の各ファイバーにおいて Legendre 変換することによって，新しい関数 $H\colon T^*W \to \mathbb{R}$ を得る事ができる．この時，W を**配位空間** (configuration space)，T^*W を**相空間** (phase space)，H を **Hamilton 関数** (Hamiltonian) と呼ぶ．W の座標を $\boldsymbol{q}$ とおき，$\boldsymbol{q}$ に対応する TW および T^*W のファイバー方向の座標をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{p}$ とおくと，$L = L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ と $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ の関係は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}, \quad H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) \tag{2.5.1}$$

および

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) - H(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{q}) \tag{2.5.2}$$

で与えられる．ここから，

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) - H(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{q})) \tag{2.5.3}$$

$$= \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{2.5.4}$$

$$= \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{2.5.5}$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{2.5.6}$$

であり，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の時間発展が

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \tag{2.5.7}$$

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{v} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{2.5.8}$$

すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{2.5.9}$$

と対称な形に書ける．(2.5.9) を **Hamilton の正準運動方程式** (Hamilton's canonical equation of motion) と呼ぶ．

運動方程式を変分原理で書き直すために，作用を

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})dt \tag{2.5.10}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \boldsymbol{v}\, dt - H(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \boldsymbol{q})dt) \tag{2.5.11}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot d\boldsymbol{q} - H(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \boldsymbol{q})dt) \tag{2.5.12}$$

と書き直す．この時点ではまだ $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ の関数であり，S は W 上の経路のなす空間

$$\{\boldsymbol{q}\colon [t_0, t_1] \to W \mid \boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1\} \tag{2.5.13}$$

の上の関数である．ここで，$\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ の関数であることを忘れて，自由に変分を取ることを考える．すなわち，S を T^*W 上の経路のなす空間

$$\{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\colon [t_0, t_1] \to T^*W |\, (\boldsymbol{q}(t_0), \boldsymbol{p}(t_0)) = (\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0),$$
$$(\boldsymbol{q}(t_1), \boldsymbol{p}(t_1)) = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_1)\}$$

の上で定義された関数

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})dt) \tag{2.5.14}$$

とみなして変分を取る．すると，

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} \cdot d(\delta \boldsymbol{q}) - \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \delta \boldsymbol{p} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q}\right) dt\right) \tag{2.5.15}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - d\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{q} - \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \delta \boldsymbol{p} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q}\right) dt\right) \tag{2.5.16}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right) \cdot \delta \boldsymbol{p} - \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \cdot \delta \boldsymbol{q}\right) dt \tag{2.5.17}$$

となる．ここで (2.5.15) から (2.5.16) に移る際には，第 2 項の部分積分を行って表面項を捨てた:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{p} \cdot d(\delta \boldsymbol{q}) = \Big[\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{q}\Big]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} d\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{q} = -\int_{t_0}^{t_1} d\boldsymbol{p} \cdot \delta \boldsymbol{q}. \tag{2.5.18}$$

変分法の基本補題から，任意の変分に対して $\delta S = 0$ になるための必要十分条件は Hamilton の正準運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{2.5.19}$$

で与えられる．Lagrange 形式の解析力学においては

- 作用は配位空間 W 上の経路の関数であり，
- Lagrange 関数と呼ばれる TW 上の関数 L が存在して，
- 作用は Lagrange 関数を経路に沿って積分することによって定義される

が，Hamilton 形式の解析力学では，

- 相空間 T^*W 上の Hamilton 関数と呼ばれる関数 H が存在して，
- H は L と Legendre 変換によって結び付いており，
- 作用は相空間 T^*W 上の経路の関数であり，
- 作用は 1 次微分形式 $\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q} - Hdt$ を経路に沿って積分することによって定義される．

1 次微分形式 $\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q}$ を **Liouville 形式** (Liouville 1-form)，1 次微分形式 $\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q} - Hdt$ を **Poincaré–Cartan の積分不変式** (Poincaré–Cartan integral invariant) と呼ぶ．

2.6 相対論的点粒子

Newton 力学において，2 つの慣性系 $(\boldsymbol{x}, t)$ と $(\boldsymbol{x}', t')$ の間の座標変換は **Galilei 変換** (Galilean transformation)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t, \\ t' = t \end{cases} \tag{2.6.1}$$

で与えられるが，特殊相対論でこれに対応するのが **Lorentz 変換** (Lorentz transformation)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t), \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}}\,t \end{cases} \tag{2.6.2}$$

である．点粒子の作用として，Lorentz 不変性を持つ汎関数で最も簡単なものは

$$S = -mc \int ds \tag{2.6.3}$$

である．ただし，

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\boldsymbol{x}^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.6.4}$$

は微小世界間隔であり，m と c は次元を調整するための定数で，符号は S が停留点で最大値でなく最小値を取るように導入した．

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}dt \tag{2.6.5}$$

と書き直すことによって

$$L = -mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2} \tag{2.6.6}$$

を得る．正準運動量は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} \tag{2.6.7}$$

であり，Hamilton 関数は

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} \tag{2.6.8}$$

である．ここで $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ とおくことによって，点粒子の静止エネルギー

$$E = mc^2 \tag{2.6.9}$$

を得る．

2.7 Poisson の定理

相空間上の関数 $f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ と $g(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ に対し，その **Poisson 括弧** (Poisson bracket) が

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \tag{2.7.1}$$

で定義される．これを用いると，Hamilton の正準方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \{H,\boldsymbol{p}\}, \quad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \{H,\boldsymbol{q}\} \tag{2.7.2}$$

と書き直される．Poisson 括弧が次の 3 つの性質を持つことが定義から容易に分かる:

- 反対称性: $\{f,g\} = -\{g,f\}$.
- Leibniz 則: $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$.
- Jacobi 恒等式: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.

相空間上の関数 $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ の時間発展は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \tag{2.7.3}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{2.7.4}$$

$$= \{H,f\} \tag{2.7.5}$$

で与えられる．時間発展で不変に保たれるような相空間上の関数を系の**保存量** **(conserved quantity)** と呼ぶ．これは，Hamilton 関数との Poisson 括弧が消えると言っても同じことである．Poisson 括弧の Leibniz 則から，f と g が系の保存量の時，その積 fg も再び系の保存量になることが分かる．これを **Poisson の定理**と呼ぶ．

2.8 Poisson 多様体

相空間 T^*W 上の Poisson 括弧 (2.7.1) が持つ性質を抽象化することによって，次の定義を得る:

定義 2.8.1. **Poisson 多様体** (Poisson manifold) とは，多様体 M と写像 $\{-,-\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ の組 $(M,\{-,-\})$ で，

1. 反対称性: $\{f,g\}=-\{g,f\}$
2. Leibniz 則: $\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$
3. Jacobi 恒等式: $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$

の 3 つの条件を満たすものを指す.

Poisson 多様体 $(M,\{-,-\})$ とその上の関数 $H\in C^\infty(M)$ が与えられると，H の生成する M 上の **Hamilton ベクトル場** (Hamiltonian vector field) X_H が

$$X_H=\{H,-\} \tag{2.8.1}$$

で定まる．このベクトル場が生成する流れ

$$\varphi_H\colon M\times\mathbb{R}\to M \tag{2.8.2}$$

を H を Hamilton 関数とする $(M,\{-,-\})$ 上の **Hamilton 流** (Hamiltonian flow) と呼ぶ.

Poisson 多様体 $(M,\{-,-\})$ に対し，M 上の関数 f をベクトル場 X_f に送る写像

$$X_\bullet\colon C^\infty(M)\to\Gamma(TM) \tag{2.8.3}$$

は Lie 環の準同型である:

命題 2.8.2. 任意の $f,g\in C^\infty(M)$ に対し

$$[X_f,X_g]=X_{\{f,g\}}. \tag{2.8.4}$$

証明. 任意の $h\in C^\infty(M)$ に対し

$$\begin{aligned}
[X_f,X_g]h &= X_fX_gh-X_gX_fh && (2.8.5)\\
&=\{f,\{g,h\}\}-\{g,\{f,h\}\} && (2.8.6)\\
&=\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\} && (2.8.7)\\
&=-\{h,\{f,g\}\} && (2.8.8)\\
&=\{\{f,g\},h\} && (2.8.9)\\
&=X_{\{f,g\}}h && (2.8.10)
\end{aligned}$$

が成り立つので，$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ である． □

2.9 Noether の定理

Hamilton 形式の解析力学では，運動の舞台たる相空間があらかじめ与えられていて，その上の関数 f を一つ選ぶごとに，それを Hamilton 関数とする Hamilton 流 $\varphi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ が定まる．Hamilton 関数 H がこの流れに沿って一定である時（すなわち，任意の $x \in M$ に対して $H(\varphi(x,s))$ が $s \in \mathbb{R}$ に依らない時），f の生成する Hamilton 流は H を Hamilton 関数とする Hamilton 系の**対称性** (symmetry) であると言う．f の生成する Hamilton 流が H を Hamilton 関数とする Hamilton 系の対称性であるための必要十分条件は，

$$\frac{dH}{ds} = \{f, H\} = 0 \tag{2.9.1}$$

である．一方，f が H を Hamilton 関数とする Hamilton 系の保存量であるための必要十分条件は

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = 0 \tag{2.9.2}$$

である．Poisson 括弧の反対称性から，(2.9.1) と (2.9.2) は同値である．つまり，対称性と保存則は同じものである．この事実を **Noether の定理** (Noether's theorem) と呼ぶ．この定理は真に偉大な定理の特徴である

- 主張は深遠で，多くの帰結を持つこと
- 証明が自明であること

の双方を備えている．この定理の典型的な適用例を幾つか挙げよう：

例 2.9.1. 相空間上の関数を Hamilton 関数とする Hamilton 系を**自励系** (autonomous system) と呼ぶ．系が自励系であることと，系が時間並進に関して不変であること（つまり，Hamilton 関数が時間にあらわに依存しないこと）は同値である．Hamilton 関数の生成する流れは時間並進（すなわち，系の時間発展）であり，この場合の Noether の定理は系が時間並進に関して不変であることと，エネルギーが保存されることが同値であることを主張する．(時間に依存する Hamilton 関数の例は 2.12 節で見る．)

例 2.9.2. ある i があって，Hamilton 関数 H が q_i に依らない時，q_i を循環座標と呼ぶのであった．この時，q_i に正準共役な運動量 p_i は H を Hamilton 関数とする Hamilton 系の保存量になる．p_i を Hamilton 関数とする Hamilton ベクトル場は

$$X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{2.9.3}$$

であり，その生成する流れは q_i に関する平行移動であることに注意すると，こ

の場合の Noether の定理は，系のある座標に関する空間並進不変性が，その座標に正準共役な運動量の保存則と同値であることを主張する．

例 2.9.3. 球座標 (r,θ,ϕ) を考えると，例 2.9.2 の特別な場合として，系が球対称であること，すなわち，ポテンシャル $V(r,\theta,\phi)$ が r のみに依存し，θ と ϕ には依存しないことと，系の角運動量 p_θ および p_ϕ が保存することは同値である．ポテンシャル V が r と θ には依存するが，ϕ には依存しない時には，正準共役な運動量のうち，p_r と p_θ は保存しないが，p_ϕ は保存する．

2.10 葉層構造

多様体 M の**葉層構造** (foliation) とは，M の互いに交わらない p 次元の連結な部分多様体の族 $\mathcal{F}=\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ への分割

$$M=\bigcup_{\alpha\in A}L_\alpha,\quad \alpha\neq\beta \text{ ならば } L_\alpha\cap L_\beta=\emptyset \tag{2.10.1}$$

であって，M の任意の点 p に対してある開近傍 $U\ni p$ と微分同相写像 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$ が存在して，任意の $\alpha\in A$ と $U\cap L_\alpha$ の任意の連結成分 F に対し，$\varphi(F)$ がある $c\in\mathbb{R}^{n-p}$ によって

$$\varphi(F)=c\times\mathbb{R}^p\subset\mathbb{R}^n \tag{2.10.2}$$

と表されるようなものを指す．ここで部分多様体とは，単射なはめ込み (immersion) の像のことを指す．この時の p を葉層構造の**次元** (dimension) と呼び，$\mathcal{F}$ の元を葉層構造の**葉** (leaf) と呼ぶ．

葉層構造の典型的な例は，与えられた無理数 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対し，トーラス $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を傾き θ の直線に分割する **Kronecker 葉層構造** (Kronecker foliation) である：

$$T^2=\bigcup_{[\alpha]\in\mathbb{R}/(\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z})}L_\alpha,\quad L_\alpha=\left\{[(x,y)]\in\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\;\middle|\;y=\theta x+\alpha\right\}.$$

多様体の接束の部分束を**接分布** (distribution) と呼ぶ．接分布 $E\subset TM$ が

$$X,Y\in\Gamma(E) \text{ ならば } [X,Y]\in\Gamma(E) \tag{2.10.3}$$

を満たす時，**包合的** (involutive) であると言う．

接分布 $E\subset TM$ に対し，

$$\{\omega\in\Gamma(T^*M)\mid \text{任意の } X\in\Gamma(M,E) \text{ に対し} \omega(X)=0\} \tag{2.10.4}$$

の生成する

$$A^*(M) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \Gamma\left(\bigwedge^p T^*M\right) \tag{2.10.5}$$

のイデアルを $\mathscr{I}(E)$ とおく．$A^*(M)$ のイデアル $\mathscr{I}$ が $d\mathscr{I} \subset \mathscr{I}$ を満たす時，$\mathscr{I}$ を**微分イデアル** (differential ideal) と呼ぶ．

部分多様体 N が任意の $p \in N$ に対して $T_pN = E_p \subset T_pM$ を満たす時，N を E の**積分多様体** (integral manifold) と呼ぶ．連結な積分多様体の中で包含関係に関して極大であるものを**極大積分多様体** (maximal integral manifold) と呼ぶ．任意の点 $p \in M$ に対して p を通る E の積分多様体が存在する時，E を**積分可能** (integrable) と呼ぶ．多様体 M 上の積分可能な接分布 $E \subset TM$ に対し，E の極大積分多様体の集合は M の葉層構造を定める．この葉層構造の次元は E の階数と一致する．

定理 2.10.1 (Frobenius の定理 (Frobenius theorem)**).** 接分布 $E \subset TM$ に対する次の 3 つの条件は同値である:

1. E は包合的．
2. $\mathscr{I}(E)$ は微分イデアル．
3. E は積分可能．

この定理の証明は，例えば [森田 05] を見よ．

2.11 シンプレクティック多様体

Poisson 多様体 $(M, \{-,-\})$ 上の点 $p \in M$ に対し

$$E_p = \{X_f(p) \in T_pM \mid f \in C^\infty(M)\} \tag{2.11.1}$$

で定義される部分空間たちは TM の部分束をなすが，これを E で表す．命題 2.8.2 から

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}} \tag{2.11.2}$$

であるので，E は包合的であり，定理 2.10.1 から E は積分可能である．E の極大積分多様体を 1 つ取って F とおく．

命題 2.11.1. 任意の $p \in F$ に対して，写像

$$\gamma_p \colon T_pF \to T_p^*F, \quad X_f \mapsto d(f|_F) \tag{2.11.3}$$

は全単射になる．

証明．F の定義から，任意の $g \in C^\infty(M)$ に対して $X_g \in T_pF$ なので，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$d(f|_F)(X_g) = df(X_g) \tag{2.11.4}$$

となる．また，T_pF の任意の元は適当な $g \in C^\infty(M)$ の元によって X_g の形に表される．

$$\begin{aligned} df(X_g) &= X_g f &(2.11.5)\\ &= \{g, f\} &(2.11.6)\\ &= -\{f, g\} &(2.11.7)\\ &= -X_f g &(2.11.8)\end{aligned}$$

なので，$X_f = 0$ と $d(f|_F) = 0$ は同値である．これは，γ_p が well-defined かつ単射であることを示している．次元が等しいベクトル空間の間の単射線形写像は同型写像なので，γ_p は同型写像である． □

従って，M の Poisson 構造が定める M 上の葉層構造の葉に対し，M の Poisson 構造から定まる写像 $\gamma\colon TF \to T^*F$ はベクトル束の同型写像になっている．これを用いて $\omega \in \Gamma(T^*F \otimes T^*F)$ を，$p \in F$ と $X, Y \in T_pF$ に対し

$$\omega_p(X, Y) = -\gamma_p(X)(Y) \tag{2.11.9}$$

で定義する．ここで，右辺は $-\gamma(X) \in T^*F_p$ による $Y \in T_pF$ の像である．

命題 2.11.2. ω は反対称である;

$$\omega \in \Gamma\left(\bigwedge^2 T^*F\right). \tag{2.11.10}$$

証明. 任意の $p \in F$ に対し，T_pF の任意の 2 元は適当な $f, g \in C^i nfty(M)$ によって X_f, X_g の形で表されることに注意すると，

$$\begin{aligned} \omega_p(X_f, X_g) &= -\gamma(X_f)(X_g) &(2.11.11)\\ &= -df(X_g) &(2.11.12)\\ &= -X_g f &(2.11.13)\\ &= -\{g, f\} &(2.11.14)\\ &= \{f, g\} &(2.11.15)\\ &= -\omega_p(X_g, X_f) &(2.11.16)\end{aligned}$$

から，ω が反対称であることが従う． □

命題 2.11.3. ω は閉形式である．

証明. 外微分の座標に依らない定義により

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g) \\
&\quad -\omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\
&= X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) + X_h(\{f, g\}) \\
&\quad -\omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\
&= X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) + X_h(\{f, g\}) \\
&\quad -\omega(X_{\{f,g\}}, X_h) + \omega(X_{\{f,h\}}, X_g) - \omega(X_{\{g,h\}}, X_f) \\
&= X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) + X_h(\{f, g\}) \\
&\quad +\omega(X_h, X_{\{f,g\}}) - \omega(X_g, X_{\{f,h\}}) + \omega(X_f, X_{\{g,h\}}) \\
&= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\
&\quad +\{h, \{f, g\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{f, \{g, h\}\} \\
&= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\})
\end{aligned}
$$

であるので，Poisson 括弧の Jacobi 律と ω が閉形式であることが同値であることが分かる． □

この ω の持つ性質を抽象して，次の定義をする:

定義 2.11.4. 多様体 M とその上の非退化閉 2 次微分形式 ω の組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体** (symplectic manifold) と呼び，この時の ω を**シンプレクティック形式** (symplectic form) と呼ぶ．

ただし，多様体 M 上の 2 次微分形式 $\omega \in C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M)$ が**非退化** (non-degenerate) であるとは，任意の点 $x \in M$ において，ω の定める交代 2 次形式

$$\omega_x \colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \tag{2.11.17}$$

が非退化 である（すなわち，任意の $v \in T_xM$ に対し，$\omega(v, -) \colon T_x \to \mathbb{R}$ が零写像であれば，$v = 0$ となる）ことを指す．

一般にベクトル束の射 $\alpha \colon E \to F$ に対し，α の転置は射 $\alpha^* \colon F^* \to E^*$ を与える．2 次微分形式 ω を与えることは，反対称性

$$\gamma^* = -\gamma \tag{2.11.18}$$

を満たす写像

$$\gamma \colon T_xM \to T_x^*M, \qquad X \mapsto \iota_X\omega \tag{2.11.19}$$

を与えることと同値であり，ω の非退化性は γ が同型写像であることと同値である．

シンプレクティック形式 ω が $\Gamma\left(\bigwedge^2 T^*M\right)$ の元であるように，Poisson 構造

$\{-,-\}$ は

$$\{f,g\} = \beta(df, dg) \tag{2.11.20}$$

によって特徴付けられるような $\Gamma\left(\bigwedge^2 TM\right)$ の元 β とみなすことができるが，この β を **Poisson 双ベクトル** (Poisson bivector) と呼ぶ．非退化な Poisson 双ベクトルは TM と T^*M の同型を引き起こすが，この同型によって $\beta \in \Gamma\left(\bigwedge^2 TM\right)$ を $\Gamma\left(\bigwedge^2 T^*M\right)$ に移したものが M のシンプレクティック形式である．

一方，シンプレクティック形式は定義から常に非退化なので，任意のシンプレクティック多様体は次のようにして Poisson 多様体の構造を持つ: シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ に対し，f の生成する Hamilton ベクトル場 X_f が

$$X_f = \gamma^{-1}(df) \tag{2.11.21}$$

で定義される．この定義から，X_f は

$$\iota_{X_f}\omega = df \tag{2.11.22}$$

で特徴付けられる．この時，任意のシンプレクティック多様体は，

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{2.11.23}$$

$$= X_f g \tag{2.11.24}$$

$$= -X_g f \tag{2.11.25}$$

で定まる自然な Poisson 構造を持つ．

従って，シンプレクティック多様体は Poisson 多様体の特別な場合であり，Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の非退化とは限らない一般化である．

任意の Poisson 多様体 M は自然な葉層構造を持ち，その各々の葉はシンプレクティック構造を持つ．これらの葉をその Poisson 多様体の**シンプレクティック葉** (symplectic leaf) と呼ぶ．特に M がシンプレクティック多様体の時，その Poisson 多様体としてのシンプレクティック葉は M 全体になる．Poisson 多様体上の Hamilton 系による時間発展は一つのシンプレクティック葉の上にとどまるので，一つの Hamilton 系を考える上では考える舞台を Poisson 多様体ではなくシンプレクティック多様体に限定しても一般性は失われない．

シンプレクティック多様体 (M_1,ω_1) と (M_2,ω_2) に対し，微分同相写像 $f\colon M_1 \to M_2$ で

$$f^*\omega_2 = \omega_1 \tag{2.11.26}$$

を満たすものが存在する時，(M_1,ω_1) と (M_2,ω_2) は**シンプレクティック同相**

(symplectomorphic) であると言い，この時の f を**シンプレクティック同相写像** (symplectomorphism) と呼ぶ．

最も基本的なシンプレクティック多様体は，$(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$ を標準座標とする $2n$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n}$ に

$$\omega_{\mathbb{R}^{2n}} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{2.11.27}$$

でシンプレクティック形式を定めたものである．シンプレクティック多様体 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^{2n}})$（もしくはその開部分多様体）からそれ自身へのシンプレクティック同相写像のことを**正準変換** (canonical transformation) と呼ぶ．

2.12 探査機の軌道

2 体の Kepler 問題は Newton によって解かれたが，多体問題はそれよりも遥かに難しく，Euler，Lagrange，Jacobi，Poincaré など，数多くの数学者が取り組んで来た．天体力学における多体問題は，解析力学やシンプレクティック幾何学の故郷であるとともに，力学系やカオスの源流であり，数学に与えた影響は計り知れない．また，20 世紀に入って人工衛星や探査機を飛ばす時代になり，理論的な興味に実用上の動機が加わった．宇宙開発にアクシデントは付き物であり，予期せぬ事態が起こった時に，可能な限り所要時間の短い軌道や，逆になるべく燃料消費の少ない軌道を速やかに見つけることは重要な課題である．

2.12.1 平面円制限 3 体問題

3 体問題は，重力相互作用をする 3 つの質点の運動を調べる問題であるが，最初の 2 体に比べて最後の 1 体の質量が極めて小さいと仮定して，2 体を背景場として扱い，その中での最後の 1 体の運動を調べるという近似が考えられる．これが制限 3 体問題 (restricted 3-body problem) であり，太陽と木星の作る重力場の中での小惑星や彗星の軌道や，地球と月の作る重力場の中でのロケットや人工衛星の軌道を求める問題などがこれにあたる．さらに，2 体の軌道が真円である時，これを円制限三体問題 (circular restricted 3-body problem) と言う．さらに，最後の 1 体が最初の 2 体の軌道面を運動する時，平面円制限三体問題 (planar circular restricted 3-body problem) と言う．2 体の質量を規格化して μ および $1 - \mu$ とおく．さらに $\mu \in (0, 1/2]$ と仮定して，重い天体を太陽，軽い天体を木星と呼び，それぞれの軌道を S および J で表す:

$$S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (-\mu \cos t, -\mu \sin t), \tag{2.12.1}$$

$$J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto ((1-\mu)\cos t, (1-\mu)\sin t). \tag{2.12.2}$$

太陽と木星の軌道の補集合

$$W := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathrm{Im}(S) \cup \mathrm{Im}(J)), \tag{2.12.3}$$

を探査機の配位空間とすると，Hamilton 関数

$$H\colon T^*W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{2.12.4}$$

は

$$H(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, t) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{P}|^2 - \frac{\mu}{|\boldsymbol{Q} - J(t)|} - \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{Q} - S(t)|} \tag{2.12.5}$$

で与えられる．Hamilton 関数があらわに時間に依存しているので，系は時間並進で不変ではなく，エネルギーは保存されない．スイングバイ (gravity assist) によって探査機を燃料消費無しで加速できるのはこのためである．太陽と木星のエネルギーを考慮に入れれば，系全体ではもちろんエネルギーは保存される．

2.12.2　時間に依存する正準変換

滑らかな写像 $\psi\colon T^*W \times \mathbb{R} \to T^*W$ が 2 つの条件

- 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\psi(-, t)\colon T^*W \to T^*W$ は微分同相写像
- ある関数 $K\colon T^*W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\psi^*\eta = \eta - dK \tag{2.12.6}$$

を満たす時，**時間に依存する正準変換** (time-dependent canonical transformation) と呼ぶ．ただし，

$$\eta = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - H dt \tag{2.12.7}$$

は Poincaré–Cartan の積分不変量である．作用汎関数は Poincaré–Cartan の積分不変量を用いて

$$S\colon \gamma \mapsto \int_{t_0}^{t_1} \gamma^*\eta \tag{2.12.8}$$

で与えられるので，正準変換の前後で表面項のみの変換を受ける;

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma^*\psi^*\eta - \int_{t_0}^{t_1} \gamma^*\eta = -\int_{t_0}^{t_1} \gamma^* dK \tag{2.12.9}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} d(\gamma^* K) \tag{2.12.10}$$

$$= K(\gamma(t_0)) - K(\gamma(t_1)). \tag{2.12.11}$$

特に，端点を固定した変分を計算することによって得られる Hamilton の正準運動方程式は，時間に依存する正準変換の前後で不変に保たれる．

$$\boldsymbol{P} = \psi^*\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{Q} = \psi^*\boldsymbol{q}, \quad H' = H + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{2.12.12}$$

とおくと，(2.12.6) は，

$$dK = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} + (H' - H)dt \tag{2.12.13}$$

と表せる．

2.12.3 Jacobi 積分と Lagrange 点

回転行列

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{2.12.14}$$

を用いて，時間に依存する座標変換を

$$\boldsymbol{Q} = R(-t)\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{2.12.15}$$

で定義する（$W \times \mathbb{R}$ の座標を $(\boldsymbol{Q}, t)$ から $(\boldsymbol{q}, t)$ に取り替えている）．これは線形変換なので，接空間 $T_{\boldsymbol{Q}}W$ に同じ写像を引き起こす．これが余接空間 $T^*_{\boldsymbol{Q}}W$ に引き起こす写像は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}R(-t), \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \tag{2.12.16}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12.17}$$

$$= R(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12.18}$$

から

$$d\boldsymbol{Q} = d(R(-t)\boldsymbol{q}) \tag{2.12.19}$$

$$= R(-t)d\boldsymbol{q} - \frac{\partial R}{\partial t}(-t)\boldsymbol{q}dt \tag{2.12.20}$$

$$= R(-t)\left(d\boldsymbol{q} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{q}dt \tag{2.12.21}$$

なので，この変換によって，Liouville 形式は

$$\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}R(t)\left(d\boldsymbol{q} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{q}dt\right) \tag{2.12.22}$$

$$= \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \mu dt \tag{2.12.23}$$

と変換される．ただし，

$$\mu = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{q} \tag{2.12.24}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{2.12.25}$$

$$= p_1 q_2 - p_2 q_1 \tag{2.12.26}$$

は回転を生成する Hamilton 関数である．(2.12.13) より，Poincaré–Cartan の積分不変式は

$$\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} - Hdt = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \mu dt - Hdt = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - hdt \tag{2.12.27}$$

と変換されるので，回転座標系 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ における Hamilton 関数は

$$h = H + \mu = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\mu}{|\boldsymbol{q} - J(0)|} - \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{q} - S(0)|} + p_1 q_2 - p_2 q_1 \tag{2.12.28}$$

で与えられる．変換後の Hamilton 関数 h は時間に依存しないことに注意せよ．従って h は系の保存量となるが，これを Jacobi 積分 (Jacobi integral) と呼ぶ．

(2.12.28) を平方完成することによって

$$h = \frac{1}{2}\left((p_1 + q_2)^2 + (p_2 - q_1)^2\right) - \frac{\mu}{|\boldsymbol{q} - J(0)|} - \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{q} - S(0)|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{q}|^2 \tag{2.12.29}$$

を得る．Hamilton 関数の $\boldsymbol{p}$ に依存しない部分

$$U\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{J(0), S(0)\} \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{q} \mapsto -\frac{\mu}{|\boldsymbol{q} - J(0)|} - \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{q} - S(0)|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{q}|^2 \tag{2.12.30}$$

を有効ポテンシャル (effective potential) と呼ぶ．

この系の平衡点は Hamilton 関数 h の微分が消える点であるが，これを **Lagrange 点** (Lagrangian point) と呼ぶ．$\boldsymbol{p}$ に関する微分が消える条件は

$$p_1 = -q_2, \quad p_2 = q_1 \tag{2.12.31}$$

を与える．この条件下で，$\boldsymbol{q}$ に関する微分が消える条件は有効ポテンシャルの臨界点に対応する．直接計算によって，Lagrange 点は 5 つあって，最初の 3 つは太陽と木星を結ぶ直線上にあり，残りの 2 つ（トロヤ点 (Trojan points)）はそれぞれが太陽と木星と正 3 角形をなす事が分かる．与えられた実数 c に対し，エネルギーの等位集合 (level set) $h^{-1}(c)$ をエネルギー超曲面 (energy hypersurface) と呼び，その W への射影の像を Hill の領域 (Hill's region) と呼ぶ．Hill の領域は，与えられたエネルギーで探査機が到達し得る太陽系内の

領域である．Hamilton 関数 (2.12.29) の第 1 項が常に正であることから，Hill の領域は

$$\{\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{S(0), J(0)\} \mid U(\boldsymbol{q}) \leq c\} \tag{2.12.32}$$

で与えられる．

第 3 章
G構造の幾何学

Erlangen 大学における教授就任演説で若き日の Felix Klein は，空間 M とそれに推移的に作用する群 G の組 (M, G) に対して対応する幾何学が定まり，その群作用で不変な空間の性質のみが幾何学の研究の対象になる，という視点を提唱した．例えば，Euclid 幾何は Euclid 空間と Euclid 合同群，アファイン幾何はアファイン空間とアファイン変換群，そして射影幾何は射影空間と射影変換群の組に対応する．アファイン変換群は無限遠超平面を保つ元からなる射影変換群の部分群であり，Euclid 変換群は Euclid 距離を保つ元からなるアファイン変換群の部分群である．大きな群で不変に保たれる性質は自動的に小さな群でも保たれるが，逆は必ずしも正しくないので，大きな群に対応する幾何学の方がより基本的であると考えられる．これによって Klein は，当時知られていた様々な幾何学を射影幾何を頂点とするような階層に位置付けるとともに，Lie 群や等質空間の研究を促した．

この Klein 流の視点を Riemann 幾何を含む形に拡張したのが，Élie Cartan による G 構造の幾何学である．Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ とそれに作用する Lie 群 G の組 $(G, \mathbb{R}^n)$ に対し，n 次元多様体 M の G 構造とは，M の接束 TM の構造群 $GL(n, \mathbb{R})$ の G への簡約のことである．つまり，M の開被覆を取って，接束 TM を自明束の貼り合わせとして表す時に，変換関数の値を $GL(n, \mathbb{R})$ ではなく G に取るということである．G がスピン群のように $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群でない場合は,「簡約する」というよりは「持ち上げる」感じになる．代表的な G 構造としては $G = GL^+(n, \mathbb{R})$，$O(n)$，$GL(n/2, \mathbb{C})$ などの場合があり，それぞれ向き付けられた多様体，Riemann 多様体，概複素多様体に対応する．また，G 構造はしばしばテンソル場によって特徴付けられ，上の 3 つの例ではそれぞれ体積形式（どこでも零にならない最高次の微分形式），Riemann 計量（至る所正定値な 2 階の対称テンソル），概複素構造（自乗すると -1 倍になる接束の自己同型）となる．

G 構造で重要な概念として積分可能性がある．多様体は Euclid 空間の開集

合を貼り合わせて得られ，この貼り合わせ写像の微分は接空間の間の線形写像を与えるが，これが常に G に入るようにアトラスを取れる時，この多様体は積分可能な G 構造を持つと言われる．別の言い方をすると，$\mathbb{R}^n$ は標準的な G 構造を持つが，G 構造を持つ多様体では各点における接空間が $\mathbb{R}^n$ と G 構造を込めて同一視されるのに対し，積分可能な G 構造を持つ多様体では各点における有限の大きさの近傍が $\mathbb{R}^n$ の開集合と G 構造を込めて同一視される．例えば，積分可能なリーマン多様体は $\mathbb{R}^n$ の開集合を等長写像で貼り合わせて得られるが，このような多様体は平坦多様体と呼ばれ，Bieberbach の定理により，コンパクトであればトーラスの有限群による商に限られることが知られている．一方，積分可能な概複素多様体は複素多様体と呼ばれ，$\mathbb{C}^n$ の開集合を双正則写像で貼り合わせて得られる．双正則写像は微分同相写像に比べると「硬い」が，等長写像よりは「柔らかい」ので，複素多様体は平坦多様体よりも遥かに多く存在する．G 構造の積分可能性は，G 構造を特徴付けるテンソルの言葉で述べることもできる．例えば，Riemann 多様体が平坦であるための必要十分条件は Riemann の曲率テンソルが零になることであり，概複素構造が積分可能であるための必要十分条件は Nijenhuis テンソルが零になることである．

この章では，G 構造の幾何学の観点からシンプレクティック幾何およびそれに関連する幾何を概観する．

3.1 シンプレクティックベクトル空間

自然数 n に対し，n 次の単位行列を I_n で表し，$2n \times 2n$ 行列 J_{2n} を

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

で定義する．

命題 3.1.1. 実ベクトル空間 V 上の任意の反対称双線形形式 ω に対し，ある自然数 r と V の適当な基底が存在して，この基底によって ω はブロック対角行列

$$\begin{pmatrix} J_{2r} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

の形に表示できる．

証明．Gram–Schmidt の直交化法 (Gram–Schmidt orthogonalization) を用いる．まず ω を写像 $V \to V^*$ と見て，その核 $\ker \omega$ の基底 $\{g_i\}_{i=1}^k$ を 1 つ取って固定する．次に，$\ker \omega$ の補空間を 1 つ取って V_1 とおくと，ω は V_1 上の反対称非退化双線形形式を定める．ここで V_1 の零でない元 e_1 を取ると，ω は V_1 上非退化なので，ある $f_1 \in V_1$ が存在して $\omega(e_1, f_1) = 1$ となる．$\{e_1, f_1\}$ が生成する V_1 の部分空間の ω に関する直交補空間を V_2 とおく．V_1 から V_2 への直

交射影は

$$v \mapsto v - \omega(v, f_1)e_1 + \omega(v, e_1)f_1 \tag{3.1.3}$$

で与えられる．ω の V_2 への制限は再び非退化であるので，$V_2 \neq 0$ であれば，$\omega(e_2, f_2) = 1$ となる組 $\{e_2, f_2\} \subset V_2$ が存在する．これを繰り返すことによって，V の基底 $\{e_1, \ldots, e_l, f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_k\}$ を得る．構成から，この基底による ω の表示は (3.1.2) で与えられる． □

系 3.1.2. ベクトル空間上の反対称 2 次形式の階数は偶数になる．

実ベクトル空間 V とその上の非退化な 2 次形式 ω の組 (V, ω) を**シンプレクティックベクトル空間** (symplectic vector space) と呼ぶ．V の次元は必ず偶数になり，ω は V の適当な基底 $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ によって行列 J_{2n} で表示される;

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.4}$$

このような基底を (V, ω) の**シンプレクティック基底** (symplectic basis) と呼ぶ．

シンプレクティックベクトル空間 (V, ω) に対し，ω を保つ V の線形自己同型からなる $GL(V)$ の部分群を**シンプレクティック群** (symplectic group) と呼び，$Sp(V, \omega)$ で表す．(V, ω) のシンプレクティック基底を用いると，シンプレクティック群は

$$Sp(V, \omega) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid g^T J_{2n} g = J_{2n} \right\} \tag{3.1.5}$$

と表示される．

注意 3.1.3. シンプレクティック群 (symplectic group) は Weyl によって当初は “complex group” と名付けられたが,「複素数体上定義された群」と紛らわしいので，ラテン語を起源に持つ complex という単語の構成要素の ‘com’ と ‘plexus’ をそれぞれギリシャ語の対応する構成要素 ‘sym’ と ‘plectikos’ に置き換えて，Weyl が新たにシンプレクティック (symplectic) という単語を創った．

(V, ω) をシンプレクティックベクトル空間とする．V の部分空間 W に対して，その直交補空間 (orthogonal complement) を

$$W^{\perp} = \{ v \in V \mid 任意の\ w \in W\ に対して \omega(v, w) = 0 \} \tag{3.1.6}$$

で表す．W は

- $W \subset W^{\perp}$ を満たす時**等方的部分空間** (isotropic subspace),
- $W \supset W^{\perp}$ を満たす時**包合的部分空間** (involutive subspace),
- $W = W^{\perp}$ を満たす時 **Lagrange 部分空間** (Lagrangian subspace)

と言う．

命題 3.1.4. (V,ω) をシンプレクティックベクトル空間，$W \subset V$ を等方的な部分空間とする時，

$$\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V \tag{3.1.7}$$

が成り立つ．

証明. 命題 3.1.1 の証明で用いた Gram–Schmidt の直交化法を用いることによって，W の任意の基底 $\{e_1,\ldots,e_k\}$ に対し，それを含む V のシンプレクティック基底 $\{e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n\}$ が取れるので，

$$2\dim W = 2k \leq 2n = \dim V \tag{3.1.8}$$

となる． □

3.2 Darboux の定理

$2n$ 次元の微分可能多様体 M に Cartan の意味での $Sp(2n,\mathbb{R})$ 構造を与える事と，M 上の 2 次微分形式 ω で至る所非退化なものを与える事は同値である．次の定理は，シンプレクティック多様体の局所的な構造に関する基本定理である:

定理 3.2.1 (Darboux). 任意の多様体 M 上の任意の非退化 2 次微分形式 ω に対し，ω が定める $Sp(2n,\mathbb{R})$ 構造が積分可能である事と，ω が閉形式である事は同値である．

従って，シンプレクティック幾何学は積分可能な $Sp(2n,\mathbb{R})$ 構造を研究する学問である．あるいは Klein 風に，シンプレクティック多様体のシンプレクティック同相で不変な性質を研究する学問であると言う事もできる．

Darboux の定理は定理 3.2.1 の形ではなく，それと同値な次の形で述べる事が多い:

定理 3.2.2 (Darboux). シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の任意の点 p に対し，p の近傍 U と $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合 V との微分同相写像 $\varphi\colon V \to U$ が存在して，

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{3.2.1}$$

が成り立つ．

Darboux の定理を示すには，次の定理を使う:

定理 3.2.3 (Moser). M をコンパクトな多様体とし，$(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ を閉区間 $[0,1]$ でパラメトライズされた M 上のシンプレクティック形式の滑らかな族とする．この時，ω_t の属する de Rham コホモロジー類が t に依存しないならば，M の

微分自己同相写像の滑らかな族 $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ で，$\varphi_0 = \mathrm{id}_M$ かつ任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$\varphi_t^*\omega_t = \omega_0 \tag{3.2.2}$$

を満たすものが存在する．

証明．M の微分同相写像の族 $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ で $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$ を満たすものが与えられた時，任意の $t \in [0,1]$ に対して (3.2.2) が成立するための必要十分条件は，(3.2.2) の左辺を t で微分して得られる

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \tag{3.2.3}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_{t+h} + \varphi_t^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \tag{3.2.4}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_{t+h}}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \tag{3.2.5}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} + \varphi_t^*\left(\lim_{h\to 0}\frac{\omega_{t+h} - \omega_t}{h}\right) \tag{3.2.6}$$

$$= \varphi_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t\right) + \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) \tag{3.2.7}$$

$$= \varphi_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right) \tag{3.2.8}$$

が任意の $t \in [0,1]$ に対して零になること，すなわち

$$\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t = 0 \tag{3.2.9}$$

である．ここで $\mathscr{L}_{X_t}$ は ω_t の X_t による Lie 微分であり，ベクトル場 X_t は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} = \varphi_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t\right) \tag{3.2.10}$$

が成立するように

$$(X_t)_{\varphi_t(x)} = \left(\frac{d}{ds}\varphi_{t+s}(x)\right)\Big|_{s=0} \tag{3.2.11}$$

と定義した．Cartan のホモトピー公式

$$\mathscr{L}_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X \tag{3.2.12}$$

と ω が閉形式であることを使うと

$$\mathscr{L}_{X_t}\omega_t = \iota_{X_t}d\omega_t + d\iota_{X_t}\omega_t = d\iota_{X_t}\omega_t \tag{3.2.13}$$

となる．ω_t の属する de Rham コホモロジー類が t に依らないという仮定から，ある 1 形式 u_t が存在して

$$\frac{d}{dt}\omega_t = -du_t \tag{3.2.14}$$

となる．この u_t と ω_t に関して双対なベクトル場 X_t を

$$u_t = \iota_{X_t}\omega_t \tag{3.2.15}$$

で定義する．M がコンパクトなので，ベクトル場の族 $(X_t)_{t\in[0,1]}$ を積分して，微分同相の族 $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ を得ることができる．このベクトル場は (3.2.9) を満たすので，得られた微分同相の族は (3.2.2) を満たす． □

この Moser の定理を使って，Darboux の定理を証明しよう:

定理 3.2.2 の証明. 任意の点 $p \in M$ に対し，p の十分小さな近傍 U を取ると，$\mathbb{R}^n$ における 0 の近傍 V と，V から U への微分同相写像 $\psi\colon V \to U$ で，0 を p に移すものが存在する．M のシンプレクティック形式 ω の p における値 $\omega_p \in \bigwedge^2 T_p^*M$ の ψ による引き戻し $\psi^*\omega_p$ は $\bigwedge^2 T_0^*\mathbb{R}^{2n}$ の元であるが，命題 3.1.1 から，$\mathbb{R}^{2n}$ の座標 $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ をうまく取って，$\psi^*\omega_p = (\omega_{\mathbb{R}^{2n}})_0$ となるようにできる．ただし，$(\omega_{\mathbb{R}^{2n}})_0$ は

$$\omega_{\mathbb{R}^{2n}} := \sum_{i=1}^{2n} dp_i \wedge dq_i \tag{3.2.16}$$

で定義される $\mathbb{R}^{2n}$ の標準的なシンプレクティック形式の $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ での値である．ここで，$t \in [0,1]$ でパラメトライズされる V 上の 2 次微分形式の族

$$\omega_t = (1-t)\omega_{\mathbb{R}^{2n}} + t\,\psi^*\omega \tag{3.2.17}$$

を考えると，任意の $t \in [0,1]$ に対して ω_t は明らかに閉形式である．また，非退化性は開条件なので，必要なら V を小さく取り直すことによって，任意の $t \in [0,1]$ に対して ω_t は非退化であると仮定できる．従って，ω_t は $t \in [0,1]$ でパラメトライズされた V 上のシンプレクティック形式の族である．V を可縮に取って，任意の $t \in [0,1]$ に対して ω_t は完全形式であると仮定することができる．(3.2.14) と (3.2.15) によってベクトル場の族 $(X_t)_{t\in[0,1]}$ を定義する．開集合 $V' \subset V$ を十分小さく取れば，V' の任意の点 x に対し，x を初期値とする X_t の積分曲線 $\varphi_t(x)$ の時刻 1 における値 $\varphi_1(x)$ が V にとどまるようにできる．これによって V' と $\psi_1(V')$ の微分同相写像ができて，作り方から

$$\varphi^*\omega_1 = \omega_0 \tag{3.2.18}$$

を満たす．従って，

$$\varphi = \psi \circ \varphi_1 \colon V' \to U \tag{3.2.19}$$

とおいて，改めて V' を V, $\varphi(V')$ を U と置き直せば，定理 3.2.2 の主張が成立する． □

Darboux の定理は，$\mathbb{R}^{2n}$ に標準的なシンプレクティック構造を与えたものがシンプレクティック多様体の任意の点の近傍の標準形であることを主張するが，実は 1 点だけでなく，任意の Lagrange 部分多様体の近傍も標準形を持つことが知られている:

定理 3.2.4 (Weinstein)．(M,ω) をシンプレクティック多様体とし，L をその Lagrange 部分多様体とする．この時，L の M における近傍 U と L の余接束 T^*L における近傍 V が存在して，U は V とシンプレクティック同相になる．

ここで余接束 T^*L には 4.1 節で述べる標準的なシンプレクティック構造を入れる．また，L は零切断の像として，標準的に T^*L の Lagrange 部分多様体とみなされる．Weinstein の定理の証明は Moser の定理を用いて Darboux の定理と同様になされるが，ここでは省略する．

3.3 複素多様体

体の包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ によって，n 次元複素線形空間 $\mathbb{C}^n$ は自然に $2n$ 次元実線形空間 $\mathbb{R}^{2n}$ とみなせるので，複素一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ は自然に実一般線形群 $GL(2n,\mathbb{R})$ の部分群になる．$2n$ 次元多様体 M に対し，TM の構造群の $GL(n,\mathbb{C})$ への簡約を M の**概複素構造** (almost complex structure) と呼ぶ．M に概複素構造を与えることは，$\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ の元 J で，$J^2 = -\mathrm{id}$ を満たすものを与えることと同値である．概複素多様体 (M, J_M) と (N, J_N) が与えられた時，

$$d\varphi \circ J_M = J_N \circ d\varphi \tag{3.3.1}$$

を満たす写像 $\varphi\colon M \to N$ を**概正則写像** (pseudo-holomorphic map) と呼ぶ．概複素多様体 (M, J_M) と (N, J_N) は，概正則写像 $\psi\colon M \to N$ と $\phi\colon N \to M$ が存在して $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_N$ かつ $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_M$ が成り立つ時，概複素多様体として同型 (isomorphic) であると呼ばれる．

積分可能な概複素構造は**複素構造** (complex structure) と呼ばれる．言い換えると，概複素多様体 (M, J_M) が複素多様体であるとは，任意の $p \in M$ に対して p の M における近傍 U と $\mathbb{C}^n$ の開集合 V が存在して，$(U, (J_M)|_U)$ と $(V, (J_{\mathbb{C}^n})|_V)$ が概複素多様体として同型であることである．ただし，ここで $\mathbb{C}^n$ の標準的な概複素構造を $J_{\mathbb{C}^n}$ とおいた．複素多様体の間の概正則写像は**正則写像** (holomorphic map) と呼ばれる．言い換えると，$\mathbb{C}^n$ の開集合を双正則写像によって貼り合わせたものが複素多様体である．

概複素多様体 (M, J) とその上の点 $p \in M$ に対して，J_p の T_pM への作用は $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM}$ を満たすので，T_pM を複素化することによって，固有値が $\sqrt{-1}$ の固有空間 T'_pM と固有値が $-\sqrt{-1}$ の固有空間 T''_pM の直和に分解する

ことができる;

$$T'_pM = \left\{ X \in T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\middle|\; J_pX = \sqrt{-1}X \right\}, \tag{3.3.2}$$

$$T''_pM = \left\{ X \in T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\middle|\; J_pX = -\sqrt{-1}X \right\}, \tag{3.3.3}$$

$$T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'_pM \oplus T''_pM. \tag{3.3.4}$$

各点におけるこれらの直和分解は M 全体で貼り合わさって，ベクトル束の直和分解

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'M \oplus T''M \tag{3.3.5}$$

を与える．$T'M$ を M の**正則接束** (holomorphic tangent bundle)，$T''M$ を M の**反正則接束** (anti-holomorphic tangent bundle) と呼ぶ．また，これらのベクトル束の双対束を用いて

$$\Omega^{p,q}(M) = \Gamma\left(\bigwedge^p (T'M)^* \otimes \bigwedge^q (T''M)^* \right) \tag{3.3.6}$$

と定義すると，直和分解

$$\Omega^r(M) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M) \tag{3.3.7}$$

が存在する．この直和分解に付随する射影を

$$\Pi^{p,q} \colon \Omega^r(M) \otimes \mathbb{C} \to \Omega^{p,q}(M) \tag{3.3.8}$$

と書き，微分作用素 ∂ と $\overline{\partial}$ を

$$\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d \colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M), \tag{3.3.9}$$

$$\overline{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d \colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M) \tag{3.3.10}$$

で定義する．$X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し

$$N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \tag{3.3.11}$$

とおくと，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$N(fX, Y) = N(X, fY) = fN(X,Y) \tag{3.3.12}$$

であることが容易に分かるので，N は $(T^*M)^{\otimes 2} \otimes TM$ の切断である．この N を **Nijenhuis テンソル** (Nijenhuis tensor) と呼ぶ．概複素多様体 (M, J) に対する次の 3 つの条件は互いに同値であることが容易に分かる:

1. Nijenhuis テンソルが零になる．
2. 任意の $X, Y \in \Gamma(T'M)$ に対し $[X, Y]$ が再び $\Gamma(T'M)$ に入る．
3. $\overline{\partial}^2 = 0$ となる．

次の定理は Darboux の定理の複素幾何における対応物である．この定理から，Nijenhuis テンソルはシンプレクティック幾何における $d\omega$ に相当する事が分かる．

定理 3.3.1 (Newlander–Nirenberg)**.** 概複素構造 J が積分可能であるための必要十分条件は Nijenhuis テンソルが零になることである．

M を複素多様体として，M の複素座標を $\left(z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i\right)_{i=1}^n$ とおくと，

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.3.13}$$

なので，M の正則接束と反正則接束はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.3.14}$$

と

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.3.15}$$

で張られていることが分かる．これらの双対基底は

$$dz_i = dx_i + \sqrt{-1}dy_i, \quad d\bar{z}_i = dx_i - \sqrt{-1}dy_i \tag{3.3.16}$$

で与えられる．

3.4 穏やかさと整合性

シンプレクティック多様体 (M, ω) の上の概複素構造 J は，任意の $p \in M$ と任意の零でない $X \in T_pM$ に対し $\omega_p(X, J_pX) > 0$ である時，**穏やかである** (tamed by ω) と言う．J が ω に関して穏やかであれば，

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega(X, JY) + \omega(Y, JX)) \tag{3.4.1}$$

で定まる g は M の Riemann 計量を与える．

シンプレクティック多様体 (M, ω) の上の穏やかな概複素構造 J は，g に関する等長写像である時，すなわち，任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し $g(JX, JY) = g(X, Y)$ である時，**ω と整合的である** (compatible with ω) と呼ばれる．

3.5 Kähler 多様体

複素幾何とシンプレクティック幾何は，一見すると全く違う種類の幾何学であるが，ある部分では非常によく似ている．どちらも偶数次元であり，実多様体をある意味で「2 重に」したものだと思える．

実多様体 N が与えられた時，余接束 $M = T^*N$ はシンプレクティック多様体の典型例であり，解析力学の故郷でもある．その自然なシンプレクティック構造は N の局所座標を $(q_1, \ldots, q_n)$，それに対応する T^*N のファイバー方向の座標を $(p_1, \ldots, p_n)$ とする時

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{3.5.1}$$

で定義される．このシンプレクティック形式を座標 $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ を用いて反対称行列で表示すると

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.2}$$

となる．

一方，接束 $W = TN$ 上のテンソル $J \in C^\infty(W, \mathrm{End}(TW))$ を，自然な直和分解 $T(TN) = TN \oplus TN$ において (3.5.2) と類似の行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{TN} \\ -\mathrm{id}_{TN} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.3}$$

で定義すると，これは W の複素構造を定める．

シンプレクティック幾何と複素幾何という 2 つ異なる幾何を同時に持つのが Kähler 多様体であり，次のように定義される:

まず，直交群 $O(2n)$，複素一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ およびシンプレクティック群 $Sp(2n, \mathbb{R})$ の共通部分がユニタリ群 $U(n)$ になることに注意しよう;

$$U(n) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n, \mathbb{R}). \tag{3.5.4}$$

このことは，これらの群がそれぞれ

$$U(n) = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; g^{-1} = g^* \right\}, \tag{3.5.5}$$

$$O(2n) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; g^{-1} = g^T \right\}, \tag{3.5.6}$$

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid J_{2n} g = g J_{2n} \}, \tag{3.5.7}$$

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; g^T J_{2n} g = J_{2n} \right\} \tag{3.5.8}$$

で定義されることと，n 次の複素正方行列から $2n$ 次の実正方行列への対応で Hermite 共役が転置に対応することから直ちに従う．従って，$U(n)$ 構造を持つ多様体は自動的に $O(2n)$ 構造，$GL(n, \mathbb{C})$ 構造および $Sp(2n, \mathbb{R})$ 構造を持つことが分かる．

定義 3.5.1. $U(n)$ 構造を持つ多様体であってそれに付随する $GL(n, \mathbb{C})$ 構造と $Sp(2n, \mathbb{R})$ 構造がともに積分可能なものを **Kähler 多様体** (Kähler manifold) と呼ぶ．

言い換えると，Kähler 多様体は複素多様体でありかつシンプレクティック多様体でもあって，しかもこれらの 2 つの構造に整合性があるようなものである．

(3.5.4) において，右辺に現れる 3 つの群のうちの任意の 2 つの共通部分は残りの 1 つに自動的に含まれることが容易に分かる．このことから，シンプレクティック構造，複素構造および Riemann 構造の 3 つのうちの 2 つが与えられれば，残りの 1 つは自動的に定まる．

シンプレクティック構造，概複素構造および Riemann 構造の関係を，それらを特徴付けるテンソル J, g および ω の言葉で述べると，

$$\omega = g(-, J-) \tag{3.5.9}$$

となる．実際，(J, g, ω) のうちの 2 つが与えられれば，残りの一つは (3.5.9) で決まる．

一般に，概複素多様体 (M, J) とその上の Riemann 計量 g の組で，g が J 不変であるもの

$$g(X, Y) = g(JX, JY) \tag{3.5.10}$$

を**概 Hermite 多様体** (almost Hermitian manifold) と呼ぶ．概複素多様体 (M, J) とその上の Riemann 計量 g があれば，g を J 作用で平均することにより概 Hermite 多様体を得ることができる;

$$\widetilde{g}(X, Y) := \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY)). \tag{3.5.11}$$

概 Hermite 構造は積分可能とは限らない $U(n)$ 構造と同値である．概複素構造が積分可能な概 Hermite 多様体を **Hermite 多様体** (Hermitian manifold) と呼ぶ．

概 Hermite 多様体 (M, J, g) に対し，2 階のテンソル $\omega \in \Gamma\left((T^*M)^{\otimes 2}\right)$ を (3.5.9) で定義すると，これは反対称になる;

$$\begin{aligned}
\omega(Y, X) &= g(Y, JX) && (3.5.12)\\
&= g(JY, J(JX)) && (3.5.13)\\
&= g(JY, -X) && (3.5.14)\\
&= -g(JY, X) && (3.5.15)\\
&= -g(X, JY) && (3.5.16)\\
&= -\omega(X, Y). && (3.5.17)
\end{aligned}$$

この ω を概 Hermite 多様体 (M, J, g) の**基本 2 次微分形式** (fundamental 2-fom) と呼ぶ．Riemann 計量 g の非退化性から基本 2 次微分形式 ω の非退化性が従うので，概 Hermite 多様体は $Sp(2n, \mathbb{R})$ 構造を持つことが分かる．一般に，この $Sp(2n, \mathbb{R})$ 構造は積分可能とは限らない．定理 3.2.1 から，Hermite

多様体 (M, J, g) が Kähler 多様体であるための必要十分条件は，(3.5.9) で定義される (M, J, g) の基本 2 次微分形式が閉形式である事である．この時 ω を **Kähler 形式**と呼ぶ．

定理 3.5.2. Kähler 多様体の複素部分多様体は Kähler 多様体である．

証明. (M, J_M, g_M) を Kähler 多様体，$(N, J_N) \subset (M, J_M)$ を M の複素部分多様体とする．M の基本 2 次微分形式を N に制限したものは N の基本 2 次微分形式に一致することが定義から直ちに分かる．制限と外微分は可換なので，M の基本 2 次微分形式が閉であれば，N の基本 2 次微分形式も閉になり，定理 3.5.2 が従う． □

Kähler 構造を持たないシンプレクティック多様体を作る問題は少なくとも Thurston [128] に遡る．この論文で Thurston はこの問題を Weinstein に帰している事から，[129] ではこの問題を Thurston–Weinstein 問題と呼んでいる．

3.6 シンプレクティック写像と Poisson 写像

シンプレクティック多様体と Poisson 多様体に対して，シンプレクティック写像および Poisson 写像の概念を自然に定式化することができる:

定義 3.6.1. シンプレクティック多様体 (M, ω_M) と (N, ω_N) に対し，

$$\varphi^* \omega_N = \omega_M \tag{3.6.1}$$

を満たす写像 $\varphi\colon M \to N$ を**シンプレクティック写像** (symplectic map) と呼ぶ．特に φ が埋め込みの時，(M, ω_M) は (N, ω_N) の**シンプレクティック部分多様体** (symplectic submanifold) と呼ばれる．

定義 3.6.2. Poisson 多様体 $(M, \{-,-\}_M)$ と $(N, \{-,-\}_N)$ の間の写像 $\varphi\colon M \to N$ は，任意の $f, g \in C^\infty(N)$ に対し

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_M = \varphi^* \{f, g\}_N \tag{3.6.2}$$

を満たす時，**Poisson 写像** (Poisson map) と呼ばれる．特に φ が埋め込みの時，$(M, \{-,-\}_M)$ は $(N, \{-,-\}_N)$ の **Poisson 部分多様体** (Poisson submanifold) と呼ばれる．

これらの定義は自然であるが，とても強い．強すぎて役に立たないほどではないが，次の 2 つの補題が示すように，これらの条件を満たす状況はかなり限られ，「自然な定義」が必ずしも良い定義とは限らないという典型的な例を与える．

補題 3.6.3. シンプレクティック多様体の間のシンプレクティック写像

$$\varphi\colon (M,\omega_M) \to (N,\omega_N)$$

が存在するための必要条件は $\dim M \leq \dim N$ である．

証明．任意の写像 $\varphi\colon M \to N$ と任意の点 $p \in M$，それに N 上の任意の微分形式 ω に対し

$$\operatorname{rank}(\varphi^*\omega)_p \leq \operatorname{rank}\omega_{\varphi(p)} \tag{3.6.3}$$

が成り立つ．一方，M 上の 2 次微分形式 ω_M が非退化であるための必要十分条件は，任意の $p \in M$ に対して

$$\operatorname{rank}(\omega_M)_p = \dim M \tag{3.6.4}$$

であることである．補題 3.6.3 はこれらの 2 つの事実から明らかである． □

補題 3.6.4. $(M,\{-,-\}_M)$ を Poisson 多様体とし，N を M の部分多様体とする時，N の Poisson 構造 $\{-,-\}_N$ で $(N,\{-,-\}_N)$ が $(M,\{-,-\}_M)$ の Poisson 部分多様体になるようなものが存在するための必要十分条件は，M 上の任意の関数 H と N 上の任意の点 p に対し，H の生成する Hamilton 流

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to M, \quad \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = (X_H)_{\varphi(t)}, \quad \varphi(0) = p \tag{3.6.5}$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi(t) \in N$ を満たすことである．また，この時，N の Poisson 構造 $\{-,-\}_N$ で $(N,\{-,-\}_N)$ が $(M,\{-,-\}_M)$ の Poisson 部分多様体になるようなものは一意的である．

証明．$(N,\{-,-\}_N)$ が $(M,\{-,-\}_M)$ の Poisson 部分多様体の時，任意の $f,g \in C^\infty(M)$ に対し，$\{f,g\}_M$ は $f|_N$ と $g|_N$ にのみ依存する．従って，M 上のベクトル場 $X_f = \{f,-\}$ は N に接している．従って必要性が従う．

一方，X_f が N に接していれば $\{f,g\}_M$ は $g|_N$ にのみ依存する．f と g の役割を入れ替えて，$\{f,g\}_M$ は $f|_N$ にのみ依存することも分かる．従って十分性が従う．

一意性は，任意の f,g と任意の $p \in N$ に対し，M における p の近傍 U で定義された関数 $\widetilde{f},\widetilde{g}$ で $U \cap N$ に制限すると f,g と一致するものを取ると，

$$\{f,g\}_N = \left\{\widetilde{f},\widetilde{g}\right\}_M\Big|_N \tag{3.6.6}$$

とならなければならないことから明らかである． □

シンプレクティック多様体と Poisson 多様体は密接に関係しているが，シンプレクティック写像と Poisson 写像の概念はかなり異なる．例えば $T^*\mathbb{R}^2$ の中の $T^*\mathbb{R}$ は，シンプレクティック部分多様体であるが，Poisson 部分多様体ではない．

3.7 Lagrange 部分多様体

相空間は，配位空間に運動量を付け加えて「2 倍に」することで得られるが，運動量が零である点からなる相空間の部分空間は配位空間と自然に同一視できる（すなわち，$M = T^*N$ の零切断の像は N と同一視できる）．この部分集合は，M のシンプレクティック形式 ω の制限が零になるという著しい性質を持っており，しかもそのような性質を持つ部分多様体の中で，包含関係に関して極大になっている．この 2 つの性質を持つ M の部分多様体のことを M の Lagrange 部分多様体と呼ぶ：

定義 3.7.1. シンプレクティック多様体 (M,ω) の部分多様体 L が

$$\omega|_L = 0 \text{ かつ } \dim L = \frac{1}{2}\dim M \tag{3.7.1}$$

を満たす時，**Lagrange 部分多様体** (Lagrangian submanifold) と呼ばれる．

シンプレクティック多様体の部分多様体がシンプレクティック部分多様体であることと Lagrange 部分多様体であることは，ある意味で対極的な概念である．前者はシンプレクティック形式の制限が非退化になることを要求し，後者は零になることを要求している．前者は開条件なのに対し，後者は閉条件なので，シンプレクティック部分多様体は少し動かしてもシンプレクティック部分多様体のままであるが，Lagrange 部分多様体は少し動かすと一般には Lagrange 部分多様体ではなくなってしまう．その意味で，Lagrange 部分多様体はシンプレクティック部分多様体よりもずっと「硬い」対象である．シンプレクティック多様体の中間次元の部分多様体が Lagrange 部分多様体であるという条件は 1 階の非線形偏微分方程式なので，与えられたシンプレクティック多様体に対し，その Lagrange 部分多様体を見つけるのは一般には難しい．Lagrange 部分多様体の典型的な例としては，上で挙げた余接束の切断の像の他に，可積分系における保存量の等位面や，Kähler 多様体の実部分多様体などがある．

また，シンプレクティック同相写像 $\varphi : (M_1,\omega_1) \to (M_2,\omega_2)$ は，そのグラフを考えることによって，直積 $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2)$ の Lagrange 部分多様体の特別な場合と考えることができる．特に，シンプレクティック多様体 M_1 と M_2 がそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体 N_1 と N_2 の余接束で，この Lagrange 部分多様体が直積 $N_1 \times N_2$ の上の関数 F の微分 dF のグラフとして与えられている時，F を正準変換 φ の**母関数** (generating function) と呼ぶ．

M_1 の座標を $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, M_2 の座標を $(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ とおくと，母関数 $F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})$ を用いて，変換前後の変数の関係は

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \tag{3.7.2}$$

と書ける．F は $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{Q}$ の関数なので，まず左式を解くことによって $\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{q}$ と

$\boldsymbol{p}$ の関数として表すことができ，次に右式を解くことによって $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ の関数として定まる．右式の符号は解析力学での標準的な流儀に合わせるためのものであり，P_i を -1 倍するなどの方法で吸収できるので，本質的ではない．

シンプレクティック幾何における重要な概念の多くがLagrange 部分多様体の言葉で書けることから，Weinstein は「全ては Lagrange 部分多様体である」というスローガンを掲げた．これが Weinstein によるシンプレクティック幾何学の教義 (Weinstein's symplectic creed) である [137]．全てというのは少し大袈裟だとしても，Lagrange 部分多様体の研究がシンプレクティック幾何の中心的な問題であることは間違いない．

第 4 章
いろいろなシンプレクティック多様体

シンプレクティック多様体は大きく分けて完全なものとコンパクトなものの2つに分かれ，それぞれに利点と欠点がある．完全でもコンパクトでもないシンプレクティック多様体もあるが，それらは取り扱いがより難しい．完全シンプレクティック多様体の例として余接束と Stein 多様体を，コンパクトなシンプレクティック多様体の例として射影多様体を挙げる．また，表現論を始めとする様々な分野と関わる重要なシンプレクティック多様体として，余随伴軌道を導入する．そして，完全シンプレクティック多様体とコンパクトシンプレクティック多様体の「いいとこどり」をした Liouville 領域を紹介した後，その境界に現れる接触多様体の概念について触れる．

4.1 余接束

シンプレクティック多様体 (M,ω) が**完全** (exact) であるとは，ある 1 次微分形式 θ が存在して $\omega = d\theta$ となることを指す．この θ を **Liouville 形式** (Liouville 1-form) と呼ぶ．シンプレクティック形式に関して Liouville 形式に双対なベクトル場 Z を **Liouville ベクトル場** (Liouville vector field) と呼ぶ;

$$\iota_Z \omega = \theta. \tag{4.1.1}$$

完全シンプレクティック多様体の最も重要かつ古典的な例は微分可能多様体 N の余接束 T^*N である．T^*N 上の 1 次微分形式 θ を，$X \in T_{(q,p)}(T^*N)$ に対し

$$\theta(X) = \langle p, \pi_* X \rangle \tag{4.1.2}$$

で定義する．ここで $\pi\colon T^*N \to N$ は自然な射影であり，$q \in N$ かつ $p \in \pi^{-1}(q) = T_q^*N$ で，(4.1.2) の右辺は $p \in T_q^*N$ と $\pi_* X \in T_p N$ の対合である．N の局所座標を $(q_1, \dots, q_n)$ とおき，この座標がファイバー T_q^*N に誘導する座標を $(p_1, \dots, p_n)$ とおくと，

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{4.1.3}$$

となる．従って

$$d\theta = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{4.1.4}$$

となり，この表式から $d\theta$ が非退化であることが分かる．また，$d\theta$ は完全形式なので，特に閉形式である．

4.2 Stein 多様体

余接束とは限らない完全シンプレクティック多様体の重要な例として Stein 多様体がある．

定義 4.2.1. 複素多様体 X 上の滑らかな関数 $S\colon X \to \mathbb{R}$ は，**Levi 形式** (Levi form) $\lambda = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f$ が正定値である時，**多重劣調和的** (plurisubharmonic) と呼ばれる．

$d^c f := df \circ J$ とおくと，$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f = -dd^c f$ となることに注意．

定義 4.2.2. 連続関数 $S\colon X \to \mathbb{R}$ は，任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して $S^{-1}((-\infty, K])$ がコンパクトである時，**皆既的** (exhaustive) と呼ばれる．

Levi 問題の肯定的な解決によって，複素多様体が皆既的な多重劣調和関数を持つことは，**Stein 多様体** (Stein manifold) であるための必要十分条件である．Stein 多様体の他の特徴付けとしては，アファイン空間 $\mathbb{C}^m$ の閉複素部分多様体であることが挙げられる．

Nash–Tognoli の定理（例えば [69] を見よ）により，任意の n 次元微分可能多様体 N に対し，ある自然数 l と l 個の $2n+1$ 変数実係数多項式 $f_1, \ldots, f_l \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{2n+1}]$ が存在して，これらの定める $\mathbb{R}^{2n+1}$ の代数的部分集合

$$U_{\mathbb{R}} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid f_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = f_l(\boldsymbol{x}) = 0\} \tag{4.2.1}$$

が N と微分同相になる．これらの定義多項式の定める $\mathbb{C}^k$ の部分多様体 (subvariety)

$$U := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{2n+1} \mid f_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = f_l(\boldsymbol{x}) = 0\} \tag{4.2.2}$$

は一般には $\mathbb{C}^{2n+1} \setminus \mathbb{R}^{2n+1}$ に特異点を持つが，特異集合 $U^{\mathrm{sing}} \subset U$ は適当な実多項式たち $g_1, \ldots, g_m$ で定義される $\mathbb{C}^{2n+1}$ の部分多様体になる．この時，

$$M = \{(\boldsymbol{x}, y) \in U \times \mathbb{C} \mid (g_1(\boldsymbol{x})^2 + \cdots + g_m(\boldsymbol{x})^2)y = 1\} \tag{4.2.3}$$

は $U \setminus U^{\text{sing}}$ と同型になり，$M_{\mathbb{R}} \cong U_{\mathbb{R}} \cong N$ となる．この M は $\mathbb{C}^{2n+1}$ の閉部分多様体なので Stein 多様体であり，N を Lagrange 部分多様体として含んでいる．従って定理 3.2.4 により，M は T^*N を開部分多様体として含む事が分かる．

4.3 射影多様体

複素アファイン空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ には代数的トーラス $\mathbb{C}^\times$ が自然に作用する：

$$\mathbb{C}^\times \ni \alpha\colon \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \alpha \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{n+1}). \qquad (4.3.1)$$

この作用は原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{n+1}$ の外では自由であり，商空間 $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \mathbf{0})/\mathbb{C}^\times$ には自然に複素多様体の構造が入る．これを**射影空間** (projective space) と呼び，$\mathbb{P}^n$ で表す．射影空間に閉部分多様体として正則に埋め込める複素多様体を**射影多様体** (projective manifold) と呼ぶ．射影多様体は Stein 多様体のコンパクトな類似物である．Chow の定理により，射影空間の任意の複素部分多様体は代数多様体であり，有限個の斉次多項式 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ の共通零点として表せることが知られている．

射影空間には少なくとも 3 つの表示があり，それぞれ射影空間の 3 つの側面を反映している．第 1 の表示は上に挙げたアファイン空間のトーラス作用による商

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times \qquad (4.3.2)$$

であり，射影空間のトーリック多様体としての側面を強調する．トーリック多様体については第 8 章でより詳しく触れる．

第 2 の表示は複素 Lie 群（あるいは代数群）の放物部分群による商

$$\mathbb{P}^n = G_{\mathbb{C}}/P \qquad (4.3.3)$$

である．ここで $G_{\mathbb{C}}$ は $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ あるいは $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ であり，$P \subset G_{\mathbb{C}}$ は

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \;\middle|\; A \in GL_1(\mathbb{C}),\ B \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{C}),\ D \in GL_n(\mathbb{C}) \right\} \qquad (4.3.4)$$

の形のブロック上三角行列たちのなす部分群である．これは射影空間の複素多様体（あるいは代数多様体）としての側面を強調する．

第 3 の表示は 4.4 節で述べる余随伴軌道

$$\mathbb{P} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (4.3.5)$$

であり，射影空間のシンプレクティック多様体としての側面を強調する．ここで，$G = U(n)$ はユニタリ群，$\mathfrak{g} = \{\xi \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n) \mid \xi^* = -\xi\}$ はその Lie 環であり，$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{g}$ である．ただし，内積

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R},\ (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY) \tag{4.3.6}$$

で $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視した．この内積は随伴作用で不変

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Z(X)Y) &= \mathrm{tr}([Z, X]Y) &(4.3.7)\\ &= \mathrm{tr}(ZXY) - \mathrm{tr}(XZY) &(4.3.8)\\ &= \mathrm{tr}(XYZ) - \mathrm{tr}(XZY) &(4.3.9)\\ &= -\,\mathrm{tr}(X[Z, Y]) &(4.3.10)\\ &= -\,\mathrm{tr}(X\,\mathrm{ad}_Z(Y)) &(4.3.11)\end{aligned}$$

なので，この同一視によって，余随伴作用は随伴作用に移る（(4.4.7) を参照）．歪 Hermite 行列に $\sqrt{-1}$ を掛けると Hermite 行列になることから直ちに分かるように，歪 Hermite 行列はユニタリ行列で対角化できるので，$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は固有値が $(\lambda, 0, \dots, 0)$ であるような歪 Hermite 行列全体のなす空間である．$(\lambda, 0, \dots, 0)$ の固定化部分群は対角行列であり，表示

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \cong G/T \tag{4.3.12}$$

を得る．記号が示唆するように，複素 Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ は実 Lie 群 G の複素化（すなわち，$G_{\mathbb{C}}$ の Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化）である．G の $G_{\mathbb{C}}/P$ への作用が推移的なので，

$$G_{\mathbb{C}}/P \cong G/(P \cap G) \tag{4.3.13}$$

となる．

$$P \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \,\middle|\, A \in U(1),\ D \in U(n) \right\} \tag{4.3.14}$$

なので，

$$\mathbb{P}^n \cong U(n+1)/(U(1) \times U(n)) \tag{4.3.15}$$

となる．

射影空間は

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{FS}} &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2) &(4.3.16)\\ &= \sqrt{-1}\partial\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} z_i d\overline{z}_i}{|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2}\right) &(4.3.17)\end{aligned}$$

$$= \sqrt{-1}\frac{\sum_{i=1}^{n+1} dz_i \wedge d\overline{z}_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \overline{z}_i \wedge dz_i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n+1} z_i \wedge d\overline{z}_i\right)}{(|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2)^2} \tag{4.3.18}$$

を Kähler 形式とする Kähler 計量を持つ．これを **Fubini–Study 計量** (Fubini–Study metric) と呼び，ω_{FS} を **Fubini–Study 形式** (Fubini–Study form) と呼ぶ．定理 3.5.2 より，任意の射影多様体は Kähler 多様体であり，特にシンプレクティック多様体になる．

4.4 余随伴軌道

G を Lie 群とし，その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおく．G の G への**随伴作用** (adjoint action)

$$\mathrm{Ad}\colon G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto ghg^{-1} \tag{4.4.1}$$

を微分することによって得られる G の $\mathfrak{g}$ への作用を G の $\mathfrak{g}$ への**随伴作用** (adjoint action) と呼び，同じ記号

$$\mathrm{Ad}\colon G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{4.4.2}$$

で表す．また，これを G のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上の線形表現と見たものは，**随伴表現** (adjoint representation) と呼ばれる．この表現の双対表現

$$\mathrm{Ad}^*\colon G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \tag{4.4.3}$$

は

$$\left\langle \mathrm{Ad}^*_g \xi, X \right\rangle = \left\langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \right\rangle \tag{4.4.4}$$

で定義され，G の**余随伴表現** (coadjoint representation) と呼ばれる．この表現を G の作用と見た時には，G の $\mathfrak{g}^*$ への**余随伴作用** (coadjoint action) と呼ぶ．$\mathfrak{g}$ の基底を取って随伴表現を行列で表示した時，$\mathfrak{g}^*$ の双対基底に関する Ad^*_g の表現行列は，Ad_g の表現行列の転置の逆行列になる．

G の随伴表現を微分することによって，$\mathfrak{g}$ の随伴表現

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (X,Y) \mapsto \mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y] \tag{4.4.5}$$

が定義される．G の余随伴表現を微分することによって得られる $\mathfrak{g}$ の余随伴表現

$$\mathrm{ad}^*\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \tag{4.4.6}$$

は，$\mathfrak{g}$ の随伴表現と

$$\langle \mathrm{ad}^*_Y(\xi), X \rangle = \langle \xi, -\mathrm{ad}_Y X \rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \xi \in \mathfrak{g}^* \tag{4.4.7}$$

で結び付いている．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し，その双対空間 $\mathfrak{g}^*$ は自然に Poisson 構造を持つ．$f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対し，

$$T_\xi^* \mathfrak{g}^* = (T_\xi \mathfrak{g}^*)^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g} \tag{4.4.8}$$

には自然な Lie 括弧があるので，これを用いて $(df)_\xi, (dg)_\xi \in \mathfrak{g}$ の Lie 括弧を取って得られる $\mathfrak{g}$ の元を $\xi \in \mathfrak{g}^*$ で評価したものを $\{f, g\}$ の ξ における値と定義する:

$$\{f, g\}(\xi) := \langle \xi, [(df)_\xi, (dg)_\xi] \rangle . \tag{4.4.9}$$

$[-,-]$ の Jacobi 恒等式は $\{-,-\}$ の Jacobi 恒等式を導き，$\mathfrak{g}^*$ は Poisson 多様体になる．$\{-,-\}$ を $\mathfrak{g}^*$ の **Lie–Poisson 括弧** (Lie–Poisson bracket) と呼び，$\{-,-\}$ が定める $\mathfrak{g}^*$ の Poisson 構造を $\mathfrak{g}^*$ の **Lie–Poisson 構造** (Lie–Poisson structure) と呼ぶ．

注意 4.4.1. Lie 群が Poisson 構造を持ち，Lie 群の積が Poisson 多様体の射になっている時，Poisson–Lie 群と呼ぶが，これは Lie–Poisson 構造とは全く別の概念である．

次の主張はこれまでに述べて来た事の自明な帰結であるが，その重要性に鑑み，定理として述べることにする:

定理 4.4.2. Lie 群 G の余随伴軌道 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ の Lie–Poisson 構造のシンプレクティック葉である．

従って余随伴軌道は自然なシンプレクティック構造を持つが，この時のシンプレクティック形式を **Kostant–Kirillov 形式** (Kostant–Kirillov form) と呼ぶ．

4.5 Liouville 領域

コンパクトな境界付き多様体 X とその上の 1 形式 θ の組 (X, θ) は，

- $\omega = d\theta$ はシンプレクティック形式
- 条件 $\iota_Z \omega = \theta$ によって一意的に定まる Liouville ベクトル場 (Liouville vector field) Z が X の境界に沿って外を向いている（どこでも境界に接しない）

の 2 つの条件を満たす時，**Liouville 領域** (Liouville domain) と呼ばれる．

任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して，Stein 多様体 X を皆既的な多重劣調和関数 $S\colon X \to \mathbb{R}$ で切り取って得られる境界付き多様体 $S^{-1}((-\infty, K])$ は **Stein 領域** (Stein domain) と呼ばれる．組 $(S^{-1}((-\infty, K]), \theta = d^c S)$ は Liouville 領域の重要な例となる．Liouville ベクトル場 Z は X の Kähler 計量に関する S の勾配ベクトル場 ∇S で与えられる．

4.6 接触多様体

n を自然数とする時，$2n+1$ 次元多様体 N 上の**接触形式** (contact form) とは，微分 1 形式 θ で

$$\theta \wedge (d\theta)^n \tag{4.6.1}$$

がどこでも 0 にならないものを指す．N 上の**接触構造** (contact structure) とは，接束 TN の部分束 ξ で，ある接触形式 θ によって $\xi = \ker\theta$ と書けるものを指す．2 つの接触形式 θ と θ' が同じ接触構造を定めるための必要十分条件は，ある関数 $\phi\colon N \to \mathbb{R}$ によって $\theta' = e^{\phi}\theta$ と書けることである．

接触多様体はシンプレクティック多様体の奇数次元における類似物である．接触多様体の作り方の一つは，余接束 T^*W と，その上の時間に依存する Hamilton 関数 $H\colon T^*W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$T^*W \times \mathbb{R}$ 上の Poincaré–Cartan の積分不変式 (Poincaré–Cartan integral invariant)

$$\eta = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - H dt \tag{4.6.2}$$

を考えることである．もう一つの作り方は，余接束 T^*W とその上の時間に依存しない Hamilton 関数 $H\colon T^*W \to \mathbb{R}$ に対して，エネルギー超曲面 $H^{-1}(c) \subset T^*W$ を考えることである．どちらの作り方でも，得られる多様体が接触多様体になるという条件は Hamilton 関数に対する非自明な条件になる．第 1 の例の典型例は $H=1$ の場合で，この時の接触形式は $\eta = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - dt$ で与えられる．第 2 の例の典型的かつ重要な例は多重劣調和関数の等位集合であり，これは Liouville 領域の境界を与える．

接触多様体 (N, θ) に対し，$(N \times \mathbb{R}, e^t(d\theta + dt \wedge \theta))$ はシンプレクティック多様体になる．これを N の**シンプレクティック化** (symplectization) と呼ぶ．

接触構造を保つ微分同相写像を**接触同相** (contactomorphism) と呼ぶ．微分同相写像 $\psi\colon N \to N$ が接触同相であるための必要十分条件は，ある関数 $\phi\colon N \to \mathbb{R}$ が存在して，N の接触形式 ξ が $\psi^*\theta = e^{\phi}\theta$ を満たすことである．

第 5 章
運動量写像とシンプレクティック商

シンプレクティック多様体 (M, ω) とその上の Hamilton 関数 H が Lie 群 G の作用による対称性を持てば，M を商空間 M/G に取り替えて系の自由度を減らそうと考えるのは自然であろう．だが，一般に M/G はシンプレクティック多様体ではない．もし G が奇数次元であれば M/G も奇数次元となり，そもそもシンプレクティック構造を持ち得ない．

シンプレクティック幾何における正しい商の概念は，Hamilton 系が対称性を持てば Noether の定理によって対応する運動量が保存することに気付くことによって得られる．すなわち，まず対称性に付随する運動量が一定であるような部分空間を取ってから，その部分空間を群の作用で割るのである．こうして得られる商をシンプレクティック商と呼ぶ．

これを正確に定式化するためには，Lie 群のシンプレクティック多様体への Hamilton 作用とその運動量写像の概念が必要である．その過程で，4.4 節で見た Lie 環の双対空間の Poisson 構造が自然に現れる．

シンプレクティック商は代数幾何における幾何学的不変式論的商 (geometric invariant theory quotient) と密接に関わっている．シンプレクティック商を定義するには，シンプレクティック多様体 (M, ω) とそこへの Lie 群 G の Hamilton 作用だけではなく，$\mathfrak{g}^*$ の元 ξ を選ばなければならない．これは GIT 商における直線束の G 線形化 (G-linearization) の選択と対応している．ξ を変えることによるシンプレクティック商の変化は代数幾何で VGIT(variation of GIT quotient) と呼ばれ，理論的にも応用上も重要である．VGIT の典型的な例は第 8 章で議論するトーリック幾何において見ることができる．

5.1 Hamilton 作用

Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に作用しているとする;

$$a\colon G\times M\to M,\ (g,x)\mapsto g\cdot x. \tag{5.1.1}$$

作用 a を微分することによって写像 $\mathfrak{g}\to\Gamma(TM)$ ができるが，これによる $Y\in\mathfrak{g}$ の像を $\underline{Y}\in\Gamma(TM)$ と書き，Y の**基本ベクトル場** (fundamental vector field) と呼ぶ．任意の $Y\in\mathfrak{g}$ に対してある関数 $\mu_Y\colon M\to\mathbb{R}$ が存在して，Y の基本ベクトル場 $\underline{Y}$ が μ_Y に付随する Hamilton ベクトル場になっていると仮定する;

$$X_{\mu_Y}=\underline{Y}. \tag{5.1.2}$$

Hamilton ベクトル場の定義によって，(5.1.2) は次のように書き換えられる;

$$d\mu_Y=\iota_{\underline{Y}}\omega. \tag{5.1.3}$$

与えられたベクトル場に対し，それを Hamilton ベクトル場に持つ関数は定数を加える自由度を除いて一意的に決まる．$\mathfrak{g}$ の元 $Y\in\mathfrak{g}$ 毎にこの定数を一つ選んで固定することによって，写像

$$\mathfrak{g}\to C^\infty(M),\ Y\mapsto\mu_Y \tag{5.1.4}$$

ができる．さらに，定数を上手く取ることによって (5.1.4) は線形写像にできる．この時，M 上の $\mathfrak{g}^*$ 値 C^∞ 関数

$$\mu\colon M\to\mathfrak{g}^* \tag{5.1.5}$$

が存在して，任意の $Y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\mu_Y=\langle\mu,Y\rangle \tag{5.1.6}$$

が成り立つ．この写像は，命題 2.8.2 から

$$X_{\{\mu_Y,\mu_Z\}}=[X_{\mu_Y},X_{\mu_Z}] \tag{5.1.7}$$
$$=[Y,Z] \tag{5.1.8}$$
$$=X_{\mu_{[Y,Z]}} \tag{5.1.9}$$

を満たすが，与えられた Hamilton ベクトル場を持つ Hamilton 関数には定数を加える自由度があるので，任意の $Y,Z\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\mu_{[Y,Z]}=\{\mu_Y,\mu_Z\},\quad \forall Y,Z\in\mathfrak{g} \tag{5.1.10}$$

を満たすとは限らない．

定義 5.1.1. シンプレクティック多様体 (M,ω) への連結な Lie 群 G の **Hamilton 作用** (Hamiltonian action) とは，G の M への作用と M 上の C^∞ 関数

$$\mu\colon M\to\mathfrak{g}^* \tag{5.1.11}$$

の組で，次の性質を満たすようなものを指す:

1. G の M への作用はシンプレクティック形式 ω を保つ，すなわち，任意の $g \in G$ に対して $g^*\omega = \omega$ である．
2. 任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対し，Y の生成する M 上のベクトル場 $\underline{Y}$ は $\langle \mu, Y \rangle : M \to \mathbb{R}$ を Hamilton 関数とする Hamilton ベクトル場である;

$$\iota_{\underline{Y}}\omega = d\langle \mu, Y \rangle . \tag{5.1.12}$$

3. 写像 $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ は Poisson 写像である，すなわち，任意の $Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mu_{[Y,Z]} = \{\mu_Y, \mu_Z\} \tag{5.1.13}$$

である．

この時，μ を**運動量写像** (moment map) と呼ぶ．

命題 5.1.2. 運動量写像の条件 (5.1.13) は μ の同変性

$$\mu(g \cdot x) = \mathrm{Ad}_g^*(\mu(x)), \quad \forall g \in G,\ x \in M \tag{5.1.14}$$

と同値である．

証明. $Y \in \mathfrak{g}$ に対し $g = \exp(tY)$ とおいて，(5.1.14) の左辺と $Z \in \mathfrak{g}$ の対合を取って $t = 0$ で微分すると，基本ベクトル場の定義と (5.1.2)，それに Poisson 括弧の定義より

$$\left.\frac{d}{dt}\mu_Z(e^{tY} \cdot x)\right|_{t=0} = \underline{Y}\mu_Z(x) \tag{5.1.15}$$

$$= X_{\mu_Y}\mu_Z(x) \tag{5.1.16}$$

$$= \{\mu_Y, \mu_Z\}(x) \tag{5.1.17}$$

となる．一方，(5.1.14) の右辺を $t = 0$ で微分すると

$$\left.\frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}_{e^{tY}}^*\, \mu, Z \rangle\right|_{t=0} = \langle \mathrm{ad}_Y^*\, \mu, Z \rangle \tag{5.1.18}$$

$$= \langle \mu, \mathrm{ad}_Y Z \rangle \tag{5.1.19}$$

$$= \langle \mu, [Y, Z] \rangle \tag{5.1.20}$$

$$= \mu_{[Y,Z]} \tag{5.1.21}$$

となる．G が連結であることと，(5.1.14) が単位元 $g = e$ で自明に成り立つこと，それに常微分方程式の解の一意性から，(5.1.14) が任意の $g \in G$ に対して成り立つための必要十分条件は，微分して得られる式 (5.1.13) が成り立つことである． □

次の 2 つの命題は定義から直ちに従う:

命題 5.1.3. Lie 群 G の (M, ω) への Hamilton 作用が与えられていて，その運動量写像が $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ であるとする．この時，G の任意の閉部分群 H に G の Hamilton 作用を制限したものは H の Hamilton 作用を与え，その運動量写像は $\iota^* \circ \mu\colon M \to \mathfrak{h}^*$ となる．ただし，$\iota^*\colon \mathfrak{g}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}^*$ は Lie 群の埋め込み $H \hookrightarrow G$ が誘導する Lie 環の埋め込み $\iota_*\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ に双対な全射線形写像である．

命題 5.1.4. Lie 群 G_1 と G_2 がシンプレクティック多様体 (M_1, ω_1) と (M_2, ω_2) に Hamilton 作用を持っていて，その運動量写像がそれぞれ $\mu_1\colon M_1 \to \mathfrak{g}_1^*$ と $\mu_2\colon M_2 \to \mathfrak{g}_2^*$ で与えられるとする．この時，$G_1 \times G_2$ は $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ への自然な Hamilton 作用を持ち，その運動量写像は

$$\mu_1 + \mu_2\colon M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \tag{5.1.22}$$

で与えられる．

また，次の命題の証明も易しい:

命題 5.1.5. 余随伴軌道 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ への余随伴作用 $G \curvearrowright \mathcal{O}$ は Hamilton 作用であり，その運動量写像は埋め込み写像

$$\iota\colon \mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^* \tag{5.1.23}$$

で与えられる．

証明. 任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ 上の 1 次微分形式の等式

$$d\langle \iota, Y \rangle = \iota_{\underline{Y}}\omega \tag{5.1.24}$$

を示せばよい．任意の $\xi \in \mathcal{O}$ に対し，Y の基本ベクトル場 $\underline{Y}$ の ξ における値は

$$\underline{Y}_\xi = \mathrm{ad}_Y^*(\xi) \in \mathfrak{g}^* \tag{5.1.25}$$

で与えられる．また，任意の $\eta \in T_\xi\mathcal{O}$ は適当な $Z \in \mathfrak{g}$ によって

$$\eta = \mathrm{ad}_Z^*(\xi) \tag{5.1.26}$$

と表される．(5.1.24) の右辺と η との対合を取ると，

$$\begin{aligned}
\omega(\underline{Y}_\xi, \eta) &= \omega(\mathrm{ad}_Y^*(\xi), \mathrm{ad}_Z^*(\xi)) && (5.1.27)\\
&= \langle \xi, [Y, Z] \rangle && (5.1.28)\\
&= \langle \xi, -\mathrm{ad}_Z Y \rangle && (5.1.29)\\
&= \langle \mathrm{ad}_Z^* \xi, Y \rangle && (5.1.30)\\
&= \langle \eta, Y \rangle && (5.1.31)
\end{aligned}$$

となるが，これは明らかに (5.1.24) の左辺と η の対合に等しい． □

次の命題は Hamilton 作用の例を作る上で重要である:

命題 5.1.6. 完全シンプレクティック多様体 $(M, \omega = d\theta)$ への θ を保つ Lie 群の作用は Hamilton 作用である.

証明. Lie 群 G が M に θ を保って作用している時，任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathscr{L}_{\underline{Y}}\theta = 0 \tag{5.1.32}$$

である.

$$\mu_Y = -\iota_{\underline{Y}}\theta \tag{5.1.33}$$

とおくと，これは Y に関して線形なので，ある $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ が存在して，任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mu_Y = \langle \mu, Y \rangle$ となる．任意の $Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
d\mu_Y &= -d\iota_{\underline{Y}}\theta && (5.1.34)\\
&= -(d\iota_{\underline{Y}} + \iota_{\underline{Y}}d)\theta + \iota_{\underline{Y}}d\theta && (5.1.35)\\
&= -\mathscr{L}_{\underline{Y}}\theta + \iota_{\underline{Y}}d\theta && (5.1.36)\\
&= \iota_{\underline{Y}}d\theta && (5.1.37)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
\mu_{[Y,Z]} &= -\iota_{\underline{[Y,Z]}}\theta && (5.1.38)\\
&= -\iota_{[\underline{Y},\underline{Z}]}\theta && (5.1.39)\\
&= -\iota_{\mathscr{L}_{\underline{Y}}\underline{Z}}\theta && (5.1.40)\\
&= -\mathscr{L}_{\underline{Y}}(\iota_{\underline{Z}}\theta) && (5.1.41)\\
&= \mathscr{L}_{\underline{Y}}(\mu_Z) && (5.1.42)\\
&= \underline{Y}(\mu_Z) && (5.1.43)\\
&= X_{\mu_Y}(\mu_Z) && (5.1.44)\\
&= \{\mu_Y, \mu_Z\} && (5.1.45)
\end{aligned}$$

なので，μ は G 作用の運動量写像である. □

余接束への群作用は，命題 5.1.6 の典型的な適用例になっている.

命題 5.1.7. Lie 群 G の多様体 N への作用は，余接束 $(M, \omega) = (T^*N, d\theta)$ への Hamilton 作用に自然に持ち上がる.

証明. 余接束上の Liouville 形式 θ の定義 (4.1.2) から，θ が G 作用で不変であること，すなわち，任意の $g \in G$ に対して

$$g^*\theta = \theta \tag{5.1.46}$$

となることは明らかである. □

命題 5.1.6 のもう一つの典型的な適用例は，シンプレクティックベクトル空間への線形な群作用である．

命題 5.1.8. シンプレクティックベクトル空間 $\left(\mathbb{C}^n, \sqrt{-1}/2\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z}_i\right)$ へのユニタリ群 $U(n)$ の自然な作用は Hamilton 作用であり，その運動量写像は

$$\mu\colon \mathbb{C}^n \to \mathfrak{u}(n), \quad (z_i)_{i=1}^n \mapsto \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}(\overline{z}_i z_j)\right)_{i,j=1}^n \tag{5.1.47}$$

で与えられる．

証明. $\mathbb{C}^n$ 上の標準的なシンプレクティック形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z}_i \tag{5.1.48}$$

は，$\mathbb{C}^n$ 上の 1 次微分形式

$$\theta = \frac{\sqrt{-1}}{4}\sum_{i=1}^n (z_i \wedge d\overline{z}_i - \overline{z}_i \wedge dz_i) \tag{5.1.49}$$

によって

$$\omega = d\theta \tag{5.1.50}$$

と表される．ユニタリ群 $U(n)$ の元 $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ の $\mathbb{C}^n$ への作用は

$$z = (z_i)_{i=1}^n \mapsto g \cdot z = \left(\sum_{j=1}^n g_{ij} z_j\right)_{i=1}^n \tag{5.1.51}$$

で与えられるので，$Y = (Y_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathfrak{u}(n)$ の基本ベクトル場は，$g(t) = \exp(tY)$ とおいて，

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \left.\frac{d(g(t)\cdot z)_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial z_i} + (\text{c.c.}) \tag{5.1.52}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left.\frac{d\left(e^{tY}\cdot z\right)_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial z_i} + (\text{c.c.}) \tag{5.1.53}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left.\left(Ye^{tY}\cdot z\right)_i\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial z_i} + (\text{c.c.}) \tag{5.1.54}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} z_j\right) \frac{\partial}{\partial z_i} + (\text{c.c.}) \tag{5.1.55}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n Y_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i,j=1}^n \overline{Y}_{ij} \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \tag{5.1.56}$$

となる．ただし，(c.c.) は複素共役 (complex conjugate) である．従って，

$$\mu_Y = -\iota_{\underline{Y}}\theta \tag{5.1.57}$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\left(Y_{ij}z_j\overline{z}_i - \overline{Y}_{ij}\overline{z}_j z_i\right) \tag{5.1.58}$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Y_{ij}z_j\overline{z}_i \tag{5.1.59}$$

となる．ただし，最後の等号では

$$\mathfrak{u}(n) = \{Y \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid Y^* = -Y\} \tag{5.1.60}$$

から来る

$$\overline{Y}_{ij}\overline{z}_j z_i = -Y_{ji}z_i\overline{z}_j \tag{5.1.61}$$

と

$$\sum_{i,j=1}^{n} Y_{ji}z_i\overline{z}_j = \sum_{i,j=1}^{n} Y_{ij}z_j\overline{z}_i \tag{5.1.62}$$

を使った．ここで，内積

$$(Y, Z) := -\operatorname{tr}(YZ) \tag{5.1.63}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} Y_{ij}Z_{ji} \tag{5.1.64}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} Y_{ij}\overline{Z}_{ij} \tag{5.1.65}$$

を用いて $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると，

$$\mu_Y = -\operatorname{tr}(Y\mu) \tag{5.1.66}$$

より

$$\mu(z) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}z_i\overline{z}_j\right)_{i,j=1}^{n} \tag{5.1.67}$$

となる． □

運動量写像に対しては次の定理が基本的である:

定理 5.1.9 ([10], [55], [57]). トーラス $T^n = (S^1)^n$ がコンパクトなシンプレクティック多様体 (M, ω) への Hamilton 作用を持ち，その運動量写像が

$$\mu\colon M \to \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n \tag{5.1.68}$$

で与えられているとする．この時，運動量写像の任意のファイバーは連結であり，像は T^n 作用の固定点の凸包として与えられる凸多面体になる．

証明は Morse 理論を使うが，ここでは割愛する．

5.2 シンプレクティック商

コンパクト Lie 群のシンプレクティック多様体への Hamilton 作用が与えられると，それに付随した商を次のように定義することができる:

定理 5.2.1. コンパクト Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に Hamilton 作用を持ち，その運動量写像が $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ で与えられるとする．さらに，$0 \in \mathfrak{g}^*$ が μ の正則値であり，G の $\mu^{-1}(0)$ への作用が自由であるとする;

$$
\begin{array}{ccc}
\mu^{-1}(0) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & M \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\
\mu^{-1}(0)/G. & &
\end{array}
\tag{5.2.1}
$$

この時，$M/\!\!/G := \mu^{-1}(0)/G$ 上のシンプレクティック形式 ω_{red} で

$$\pi^*\omega_{\mathrm{red}} = \iota^*\omega_M \tag{5.2.2}$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. $0 \in \mathfrak{g}^*$ が μ の正則値なので，$\mu^{-1}(0)$ は M の部分多様体である．G の $\mu^{-1}(0)$ への作用が自由なので，$M/\!\!/G := \mu^{-1}(0)/G$ は多様体になる．(5.2.2) を言い換えると，任意の $p \in \mu^{-1}(0)$ と任意の $X, Y \in T_p\mu^{-1}(0)$ に対して

$$(\omega_{\mathrm{red}})_{\pi(p)}(\pi_*X, \pi_*Y) = \omega_M(\iota_*X, \iota_*Y) \tag{5.2.3}$$

となる．π が全射なので，これを満たす $M/\!\!/$ 上の 2 次微分形式は存在すれば一意的である．存在を示すには，任意の $q \in M/\!\!/G$ と $\overline{X}, \overline{Y} \in T_q(M/\!\!/G)$ に対して，$\pi(p) = q$ となる $p \in \mu^{-1}(0)$ と $\pi_*X = \overline{X}$, $\pi_*Y = \overline{Y}$ となる X, Y を取って

$$(\omega_{\mathrm{red}})_q(\overline{X}, \overline{Y}) = (\omega_M)_p(\iota_*X, \iota_*Y) \tag{5.2.4}$$

と定義した時，これが well-defined になる（すなわち，$q \in \pi^{-1}(p)$ と $X, Y \in T_p(\mu^{-1}(0))$ の取り方に依らない）ことを示せばよい．言い換えると，任意の $p, p' \in \mu^{-1}(0)$ と $X, Y \in T_p(\mu^{-1}(0))$, $X', Y' \in T_{p'}(\mu^{-1}(0))$ に対し，$\pi(p) = \pi(p')$, $\pi_*X = \pi_*X'$ かつ $\pi_*Y = \pi_*Y'$ の時, $\omega_M(X, Y) = \omega_M(X', Y')$ を示せばよい．まず $\pi(p) = \pi(p')$ より，ある $g \in G$ が存在して $p = g \cdot p'$ となる．これを用いて $X'' = g_*X'$, $Y'' = g_*Y'$ とおくと，

$$\pi_*X' = (\pi \circ g)_*X' = \pi_*(g_*X') = \pi_*X'', \quad \pi_*Y' = \pi_*Y'' \tag{5.2.5}$$

となる．また，ω が G 作用で不変なので

$$(\omega_M)_{p'}(X', Y') = (\omega_M)_p(X'', Y'') \tag{5.2.6}$$

となる．X, Y と X'', Y'' はともに p における $\pi^{-1}(0)$ の接ベクトルであり，$\pi_* X = \pi_* X''$ から $X - X'' \in \operatorname{Ker} \pi_*$ となる．$\pi\colon \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$ が自由な G 作用による商なので，これはある $Z \in \mathfrak{g}$ が存在して

$$X - X'' = \underline{Z}_p \tag{5.2.7}$$

となることを意味する．この時，任意の $W \in T_p(\mu^{-1}(0))$ に対して

$$\begin{aligned}
\omega(\underline{Z}_p, W) &= d\mu_Z(W) && (5.2.8)\\
&= (d\langle \mu, Z\rangle)(W) && (5.2.9)\\
&= \langle d\mu(W), Z\rangle && (5.2.10)\\
&= 0 && (5.2.11)
\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の等号では $W \in T_p(\mu^{-1}(0))$ から来る

$$d\mu(W) = 0 \tag{5.2.12}$$

を使った．従って，

$$(\omega_M)_p(X'', Y'') = (\omega_M)_p(X, Y'') \tag{5.2.13}$$

となる．同様にして

$$(\omega_M)_p(X, Y'') = (\omega_M)_p(X, Y) \tag{5.2.14}$$

が分かり，ω_{red} が well-defined であることが従う．

ω_M の非退化性と

$$\dim \mu^{-1}(0) = \dim M - \dim G \tag{5.2.15}$$

より，$\omega|_{\mu^{-1}(0)}$ の核の次元は高々 $\dim G$ である．一方，G 作用の基本ベクトル場たちの張る $T(\mu^{-1}(0))$ の部分束の次元は $\dim G$ であり，しかも $\omega|_{\mu^{-1}(0)}$ の核に含まれている．従って，$\omega|_{\mu^{-1}(0)}$ の核は G 作用の基本ベクトル場たちで張られ，ω_{red} は非退化性であることが分かる． □

より一般に，余随伴軌道 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ に対し，Kostant–Kirillov 形式の符号を逆にしたものをシンプレクティック形式とするようなシンプレクティック構造を考えると，運動量写像は包含写像にマイナス符号を付けたものになる．これとシンプレクティック多様体 (M, ω) の直積 $(M \times \mathcal{O}, \omega_M - \omega_{\mathcal{O}})$ は対角型の Hamilton 作用

$$G \circlearrowright M \times \mathcal{O}, \quad g\colon (m, \xi) \mapsto (g \cdot m, \mathrm{Ad}_g^* \xi) \tag{5.2.16}$$

を持ち，その運動量写像は

$$\mu - \iota\colon (m, \xi) \mapsto \mu(m) - \xi \tag{5.2.17}$$

で与えられる．この時

$$\begin{aligned} M/\!\!/_{\mathcal{O}} G &:= (M \times \mathcal{O})/\!\!/G && (5.2.18)\\ &= \{(m, \xi) \in M \times \mathfrak{g}^* \mid \mu(m) - \xi = 0\}/G && (5.2.19)\\ &= \mu^{-1}(\mathcal{O})/G && (5.2.20) \end{aligned}$$

と書き，$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ における M の G による**シンプレクティック商** (symplectic quotient) もしくは **Marsden–Weinstein 簡約** (Marsden–Weinstein reduction) と呼ぶ．$\mathcal{O}$ を取り替えることによって，同じ Hamilton 作用に対して様々な商を考えることができる．それらの間の関係を理解することは，理論的にも応用上も興味深くかつ重要な問題である．

第 6 章
完全可積分系

対称性が高いほどHamilton系の構造は単純になるが，可能な限り最大の可換な対称性を持つ系が完全可積分系である．完全可積分系の背後にはLie環に代表されるような代数的な構造が隠されていることが多い．この章では，完全可積分系に関する基本定理であるLiouville–Arnoldの定理と，Lie環と完全可積分系の関係に関する標準的な話題を紹介する．

6.1 Liouville–Arnoldの定理

理論物理学における最も美しいアイデアの一つは，対称性と保存則の関係に関するNoetherの定理であろう．これにより，例えばエネルギー保存則は時間並進に対する対称性，運動量保存則は空間並進に対する対称性，そして角運動量は空間回転に対する対称性に対応しているのであった．

Poissonの定理により，対称性の生成関数たちはPoisson括弧に関してLie環をなす．系の対称性が高ければ高いほど保存量が増え，実質的な自由度が減って扱いやすくなる．例としてKepler問題を考えると，系の対称性としては3つの空間並進，1つの時間並進，それに3つの空間回転の合計7つある．だが，空間回転対称性に付随する保存量である角運動量の3つの成分 (M_x, M_y, M_z) はPoisson可換ではなく，3次特殊直交群 $SO(3)$ のLie環 $\mathfrak{so}(3)$ の交換関係

$$\{M_y, M_z\} = M_x,$$
$$\{M_z, M_x\} = M_y,$$
$$\{M_x, M_y\} = M_z$$

を満たすので，これらを同時にDarboux座標の一部として取ることはできない．一方，M_z と $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ がPoisson可換であることが容易に示され，これと系のエネルギーおよび運動量を合わせると，これらとその正準

共役変数の組で系の自由度が尽きることが分かる.

Poisson 可換な保存量が沢山あればあるほど系の振る舞いは単純になる. Poisson 可換な保存量 $f_1, \ldots, f_k \colon M \to \mathbb{R}$ が与えられた時, それらと任意の関数 $F \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ の合成関数 $F(f_1, \ldots, f_k)$ も $f_1, \ldots, f_k$ と Poisson 可換になる;

$$\{F(f_1, \ldots, f_k), f_i\} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial f_j} \{f_j, f_i\} = 0. \tag{6.1.1}$$

しかし, この合成関数が何ら新しい情報を与えないことは明らかである. このような状況を排除するために, 次の概念を導入する:

定義 6.1.1. 多様体 M 上の関数の組 $\{f_1, \ldots, f_k\}$ が**関数的に独立** (functionally independent) とは, 稠密な開部分集合 $U \subset M$ が存在して, 任意の $p \in U$ に対して $(df_1)_p, \ldots, (df_k)_p \in T_p^*M$ が線形独立であることを指す.

関数的に独立かつ互いに Poisson 可換な変数の数は, 相空間の次元の半分を超えないことが容易に分かる:

補題 6.1.2. (M, ω) を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とする. M 上の関数たち $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M)$ が関数的に独立かつ互いに Poisson 可換であれば, $k \leq n$ となる.

証明. ω_p は T_pM と T_p^*M の同型を引き起こし, これによる $(df_1)_p, \ldots, (df_k)_p$ の像が $(X_{f_1})_p, \ldots, (X_{f_k})_p$ であるので, $(X_{f_1})_p, \ldots, (X_{f_k})_p$ は線形独立になる.

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0 \tag{6.1.2}$$

より, $(X_{f_1})_p, \ldots, (X_{f_k})_p$ の張る T_pM の部分空間は ω_p に関する等方部分空間になる. 命題 3.1.4 より, $2n$ 次元の完全反対称な 2 次形式の等方的な部分空間の次元は n を超えないので, $k \leq n$ となる. □

可能な最大限の Poisson 可換な保存量を持つ Hamilton 系を完全可積分系と呼ぶ:

定義 6.1.3. $2n$ 次元のシンプレクティック多様体 (M, ω) 上の関数 $H \colon M \to \mathbb{R}$ を Hamilton 関数とするような Hamilton 系が **Liouville の意味での完全可積分系** (completely integrable system in the sense of Liouville) であるとは, n 個の保存量

$$f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(M), \quad \{H, f_i\} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{6.1.3}$$

が存在して, それらが互いに Poisson 可換

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{6.1.4}$$

かつ関数的に独立であることを指す.

Liouville の意味での完全可積分系をしばしば単に**可積分系** (integrable system) と呼ぶ．Kepler 問題は最も古典的な可積分系であるが，現在ではその他にも沢山の例が知られている．

定理 6.1.4 (Liouville–Arnold)**.** $((M,\omega),H)$ を $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の完全可積分系とし，$F=(f_1,\ldots,f_n)\colon M\to\mathbb{R}^n$ を互いに Poisson 可換かつ関数的に独立な H の保存量とする．この時，F の正則値の逆像のコンパクトな連結成分 L はトーラスと同相な M の Lagrange 部分多様体であり，その上の Hamilton 流は適当な同一視 $L\cong\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の下で等速直線運動になる．

この定理は次のようにして証明される: F の値域を B とおき，$b\in B$ を F の正則値とする．F の等位集合の連結成分を $L\subset F^{-1}(b)$ とおくと，陰関数定理によって，L は M の n 次元部分多様体である．f_i による Hamilton 流の生成する 1 パラメーター変換群は $\mathbb{R}$ の M への作用を定めるが，f_i たちの Poisson 可換性から，異なる i に対する Hamilton 流は互いに可換で，全体として $\mathbb{R}^n$ の M への作用を定めることが分かる．Noether の定理により，F はこの $\mathbb{R}^n$ の作用で不変に保たれるので，この作用は L への作用を誘導する．任意の点 $p\in L$ に対し，p における $\mathbb{R}^n$ 作用の固定化部分群は $\mathbb{R}^n$ の閉部分群であり，従って Lie 群であるが，これは 0 次元になる．実際，もし p における固定化部分群が正の次元を持てば，その部分群に対応する Lie 環の元 $X\in\mathbb{R}^n=\mathrm{Lie}(\mathbb{R}^n)$ の基本ベクトル場 $\underline{X}$ を生成する $\{f_1,\ldots,f_n\}$ の線形結合 f は

$$(df)_p=\iota_{\underline{X}_p}\omega_p=0 \tag{6.1.5}$$

を満たし，b が正則値であるという仮定に反する．従って，L における $\mathbb{R}^n$ の任意の軌道は開軌道（つまり，L の部分集合として開集合）になる．L が連結なので，このことから L への $\mathbb{R}^n$ 作用が推移的であることが分かる．すなわち，L は $\mathbb{R}^n$ の等質空間であり，$\mathbb{R}^n$ の離散部分群による商空間と同相になる．$\mathbb{R}^n$ のココンパクトな離散部分群は最大階数の格子に限られるので，L がトーラスと同相であることが分かる．このトーラスを **Liouville トーラス** (Liouville torus) と呼ぶ．座標を適当に選んで，L を等質空間として $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ と同一視する．この同相写像

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\colon L\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \tag{6.1.6}$$

を**角座標** (angle coordinate) と呼ぶ．この角座標の選び方には $GL_n(\mathbb{Z})$ 分の任意性がある．角座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon L\to\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ は L から $\mathbb{R}^n$ への多価写像に持ち上がるが，定数関数の定める Hamilton ベクトル場は零なので，角座標の定める Hamilton ベクトル場は well-defined になる．この Hamilton ベクトル場の流れは b の近傍における B の局所座標 $\boldsymbol{I}=(I_1,\ldots,I_n)$ を定めるが，これを B の

作用座標 (action coordinate) と呼ぶ．言い換えると，角座標に正準共役な座標が作用座標であり，$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{I})$ が M の Darboux 座標系になる．H と $\{I_1, \dots, I_n\}$ は Poisson 可換であり，しかも $\{I_1, \dots, I_n\}$ が互いに Poisson 可換で関数的に独立な M 上の関数の組の中で極大なので，H は $I_1, \dots, I_n$ の関数であり，$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ には依存しない：

$$H = H(I_1, \dots, I_n). \tag{6.1.7}$$

H による時間発展を作用角変数で書くと，

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} \tag{6.1.8}$$

となる．I_i が時間に依存しないので，

$$\omega_i := \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad i = 1, \dots, n \tag{6.1.9}$$

も時間に依存しない．この時の $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ を**振動数ベクトル** (frequency vector) と呼ぶ．系の時間発展は Liouville トーラス L 上の等速直線運動

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega} t, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{I}} \tag{6.1.10}$$

になる．系の運動が周期的になるための必要十分条件は $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Q}^n$ である．周期的でないような解は**準周期解** (quasi-periodic solution) と呼ばれる．一般の準周期解の軌跡は Liouville トーラスの稠密な部分集合を成す．

6.2 Lie 群の分解

この節では，行列を分解する 3 つの方法を復習する．

6.2.1 Cartan 分解

n を正の自然数とし，$\mathfrak{p}$ を n 次の Hermite 行列の空間，$\mathfrak{p}_+$ を正定値 Hermite 行列のなす $\mathfrak{p}$ の部分空間とする．

補題 6.2.1. 行列の指数写像

$$\exp\colon X \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \tag{6.2.1}$$

を $\mathfrak{p}$ に制限したものは $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_+$ への全単射を与える．

証明. 任意の Hermite 行列はユニタリ行列で対角化され，その固有値は実数であるので，Hermite 行列を与えることと，互いに直交する固有空間への分解とそれぞれの固有空間に対応する実固有値を与えることは同値である．これによって，Hermite 行列を指数関数で移すことは，固有値を指数関数で移すことと同

一視される．指数関数は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^{>0}$ への全単射を与えることから補題 6.2.1 が従う． □

次の (6.2.2) を行列の**極分解** (polar decomposition) と呼ぶ．

定理 6.2.2. 任意の可逆複素行列 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ はユニタリ行列 $u \in U(n)$ と Hermite 行列 $X \in \mathfrak{p}$ を用いて

$$g = ue^X \tag{6.2.2}$$

の形に一意的に表すことができる．

証明．ある $g \in GL(n, \mathbb{C})$ が $u \in U(n)$ と $X \in \mathfrak{p}$ によって $g = ue^X$ と表されたとすると，

$$g^* g = e^{X^*} u^* u e^X = e^X I e^X = e^{2X} \tag{6.2.3}$$

となる．ここで補題 6.2.1 を用いると，g から $2X$ が一意的に決まる事が分かる．従って X および $u = ge^{-X}$ も g から一意的に決まる．

存在を示すために，与えられた $g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して $h = g^* g$ とおくと，$h^* = h$ かつ任意の $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対して $v^* h v = \|gv\|^2 > 0$ となるので，$h \in \mathfrak{p}_+$ である．従って，補題 6.2.1 からある $Y \in \mathfrak{p}$ が存在して $h = \exp(Y)$ となる．ここで $X = \frac{1}{2}Y$, $u = ge^{-X}$ とおくと，

$$u^* u = e^{-X} g^* g e^X = e^{-X} e^{2X} e^X = I \tag{6.2.4}$$

となり，u がユニタリ行列であることが分かる． □

より一般に，$G^* := \{g^* \mid g \in G\} = G$ を満たす $GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分群 G に対し $K = G \cap U(n)$，$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}$ とおくと，

$$K \times \mathfrak{p}_0 \to G, \quad (k, X) \mapsto ke^X \tag{6.2.5}$$

は全単射（さらには微分同相）になる．これを G の **Cartan 分解** (Cartan decomposition) と呼ぶ．例えば，任意の実可逆行列 g は直交行列 u と実対称行列 p を用いて $g = ue^p$ の形に一意的に表される．

6.2.2 岩澤分解

正定値実対角行列の集合を A，対角成分が全て 1 であるような複素上半三角行列の集合を N とおく．

定理 6.2.3. 任意の可逆複素行列 g は，$k \in U(n)$，$a \in A$ および $n \in N$ の積

$$g = kan \tag{6.2.6}$$

の形に一意的に表される．

証明．一意性を示すために，ある $k, k' \in U(n)$，$a, a' \in A$ および $n, n' \in N$ に対して

$$kan = k'a'n' \tag{6.2.7}$$

であると仮定しよう．

$$U(n) \cap AN = \{I\} \tag{6.2.8}$$

に注意すると，

$$(k')^{-1}k = a'n'n^{-1}a^{-1} \tag{6.2.9}$$

から

$$(k')^{-1}k = a'n'n^{-1}a^{-1} = I, \tag{6.2.10}$$

すなわち

$$k = k', \quad an = a'n' \tag{6.2.11}$$

が分かる．同様に，$A \cap N = \{I\}$ と $an = a'n'$ から $a = a'$ かつ $n = n'$ が従うので，表示 (6.2.6) は一意的である．

表示 (6.2.6) の存在を示すために，g の i 列目の列ベクトルを v_i とおいて，$\mathbb{C}^n$ の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に対して Gram–Schmidt の直交化法を行う:

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} (v_i, u_j)\, u_j, \quad a_i = \|w_i\|, \quad u_i = \frac{1}{a_i} w_i. \tag{6.2.12}$$

ここで

$$k = (u_1\ u_2\ \cdots\ u_n) \tag{6.2.13}$$

とおくと，k はユニタリ行列であり，構成から

$$k = g \begin{pmatrix} a_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.2.14}$$

となる事が分かる．後はこれを

$$g = k \begin{pmatrix} a_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \tag{6.2.15}$$

$$= k \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{6.2.16}$$

$$= k \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.17}$$

と変形すればよい. □

$G^* := \{g^* \mid g \in G\}$ を満たす $GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分群 G に対し G と $U(n)$, A および N との共通部分を改めて K, A および N とおくと,

$$K \times A \times N \to G, \quad (k, a, n) \mapsto kan \tag{6.2.18}$$

は全単射（さらには微分同相）になる. これを G の**岩澤分解** (Iwasawa decomposition) と呼ぶ. 例えば, 任意の実可逆行列 g は直交行列 u と正の対角行列 a, それに対角成分が 1 の上三角行列 n を用いて $g = kan$ の形に一意的に表される. この時, $g = QR$, $Q = k$, $R = an$ とおいて, 実可逆行列の **QR 分解** (QR decomposition) と呼ぶ.

6.2.3 Bruhat 分解

上半三角可逆複素行列のなす群を B とおく. また, 置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対応する置換行列を $\dot{w} \in GL(n, \mathbb{Z})$ と書く;

$$\dot{w}_{ij} = \delta_{i,w(j)}. \tag{6.2.19}$$

定理 6.2.4. 任意の可逆複素行列 g は, ある $w \in \mathfrak{S}_n$ と $b, b' \in B$ によって

$$g = b\dot{w}b' \tag{6.2.20}$$

と表される.

証明. 表示 (6.2.20) の存在の証明は**掃き出し法** (Gaussian elimination) を用いて構成的に行われる. まず, 行列に右から上半三角行列を掛けることは, ある列をスカラー倍することと, $i < j$ に対して第 i 列をスカラー倍して第 j 列に加えることを繰り返して実現できることに注意せよ. 与えられた g の 1 列目に着目し, $g_{i1} \neq 0$ となるような最大の i を $w(1)$ とおく;

$$g_{i1} = 0, \qquad i = w(1) + 1,\ w(1) + 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.2.21}$$

この時, 適当な $b^{(1)} \in B$ を右から掛けることによって,

$$g^{(1)} = gb^{(1)} \tag{6.2.22}$$

が

$$g^{(1)}_{w(1),j} = \delta_{1j}, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6.2.23}$$

を満たすようにできる．

次に $g^{(1)}$ の 2 列目に着目して，$g^{(1)}_{i2} \neq 0$ となるような最大の i を $w(2)$ とおく；

$$g^{(1)}_{i2} = 0, \qquad i = w(2)+1,\ w(2)+2,\ \ldots,\ n. \tag{6.2.24}$$

(6.2.23) から，

$$g^{(1)}_{w(1)2} = 0 \tag{6.2.25}$$

なので

$$w(2) \neq w(1) \tag{6.2.26}$$

である．再び適当な $b^{(2)} \in B$ を右から掛けることによって，$g^{(1)}$ の 1 列目を変えずに，

$$g^{(2)} = g^{(1)}b^{(2)} \tag{6.2.27}$$

が

$$g^{(2)}_{w(2),j} = \delta_{2j}, \qquad j = 2, \ldots, n \tag{6.2.28}$$

を満たすようにできる．これを繰り返すことによって，$k = 3, \ldots, n$ に対しても，

$$w(k) \notin \{w(1), w(2), \ldots, w(k-1)\} \tag{6.2.29}$$

と $b^{(k)} \in B$ が存在して，

$$g^{(k)} = g^{(k-1)}b^{(k)}, \tag{6.2.30}$$

$$g^{(k)}_{w(k),j} \neq 0, \tag{6.2.31}$$

$$g^{(k)}_{ik} = 0 \qquad i = w(k)+1, w(k)+2, \ldots, n, \tag{6.2.32}$$

$$g^{(k)}_{w(k),j} = \delta_{kj}, \qquad j = k, k+1, \ldots, n \tag{6.2.33}$$

となる．ここで

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(n) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n, \tag{6.2.34}$$

$$b = b^{(1)} \cdots b^{(n)} \in B \tag{6.2.35}$$

とおくと，

$$g^{(n)} = gb \tag{6.2.36}$$

は任意の $i, j = 1, \ldots, n$ に対して

$$i > w(j) \text{ ならば } g_{ij}^{(n)} = 0 \tag{6.2.37}$$

を満たす．ここで

$$u' = g^{(n)} \dot{w}^{-1} \tag{6.2.38}$$

とおくと，

$$u'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}^{(n)} \left(\dot{w}^{-1}\right)_{kj} = g_{iw^{-1}(j)}^{(n)} \tag{6.2.39}$$

なので，$i > j$ ならば $u'_{ij} = 0$，すなわち $u \in B$ となる． □

(6.2.20) の表示で $w \in W$ は一意的である事が知られている．こうして得られる

$$GL(n, \mathbb{C}) = \coprod_{w \in W} BwB \tag{6.2.40}$$

を $GL(n, \mathbb{C})$ の **Bruhat 分解** (Bruhat decomposition) と呼ぶ．これは代数閉体上の連結簡約代数群 G，その Borel 部分群 B，それに Wely 群 W に対する分解

$$G = \coprod_{w \in W} BwB \tag{6.2.41}$$

に一般化され，行列の **LU 分解** (LU decomposition) （下半三角行列 L と上半三角行列 U の積への分解）の一般化とみなすことができる．

群の Bruhat 分解 (6.2.41) が誘導する旗多様体の分割

$$G/B = \coprod_{w \in W} Bw \tag{6.2.42}$$

も **Bruhat 分解** (Bruhat decomposition) と呼ばれる．これは G/B の胞体分割になっており，その各々の胞体は **Schubert 胞体** (Schubert cell) と呼ばれる．

6.3 戸田格子

戸田格子は n 個の質点が指数関数型のポテンシャルを持つバネで繋がれた系であり，その Hamilton 関数は，質点の位置を $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$，それに正準共役な運動量を $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ とおいた時，

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} \tag{6.3.1}$$

で与えられる．Hamilton の運動方程式は

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \tag{6.3.2}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}} \tag{6.3.3}$$

であり，Newton の運動方程式は

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}} \tag{6.3.4}$$

である．この系は明らかに平行移動 $q_i \mapsto q_i + c$ で不変なので，系の運動を重心の運動と相対運動に分けると，重心運動量

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{6.3.5}$$

は保存され，重心の座標

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{6.3.6}$$

は等速直線運動をする．重心系での座標を改めて $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ とおくと，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \tag{6.3.7}$$

となる．重心系においては $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ のうちの一組（例えば p_n と q_n）は余分であり，残りの座標で表されるが，対称性を壊さないようにそのままにしてある．ここで **Flaschka の従属変数** (Flaschka's dependent variables)

$$a_i = \frac{1}{2} e^{(q_i - q_{i+1})/2}, \qquad b_i = \frac{1}{2} p_i \tag{6.3.8}$$

を新しい座標に取ると，運動方程式は

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{1}{2} a_i \left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{dq_{i+1}}{dt} \right) \tag{6.3.9}$$

$$= a_i (b_i - b_{i+1}), \tag{6.3.10}$$

$$\frac{db_i}{dt} = \frac{1}{2} \left(e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}} \right) \tag{6.3.11}$$

$$= 2 \left(a_{i-1}^2 - a_i^2 \right) \tag{6.3.12}$$

となる．ここでさらに

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \tag{6.3.13}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.14}$$

とおくと，運動方程式は Lax 形式

$$\frac{dL}{dt} = [M, L] \tag{6.3.15}$$

で表される．

戸田方程式の初期値問題は QR 分解を用いて次のように解くことができる:

定理 6.3.1. 実対称三重対角行列 L_0 と $t \in \mathbb{R}$ に対して $e^{-L_0 t}$ を QR 分解して

$$e^{-L_0 t} = Q(t)R(t) \tag{6.3.16}$$

とおくと，

$$L(t) := Q(t)^{-1} L_0 Q(t) \tag{6.3.17}$$

は Lax 方程式 (6.3.15) を満たす．

証明．(6.3.16) より

$$Q(t) = e^{-L_0 t} R(t)^{-1} \tag{6.3.18}$$

なので，

$$\begin{aligned} L(t) &= Q(t)^{-1} L_0 Q(t) \\ &= R(t) e^{L_0 t} L_0 e^{-L_0 t} R(t)^{-1} \\ &= R(t) L_0 R(t)^{-1} \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

となる．まず，$L(t)$ が対称三重対角行列であることを示す．L_0 が対称行列，Q が直交行列なので，

$$(QL_0Q^{-1})^T = (Q^{-1})^T L_0^T Q^T = QL_0Q^{-1} \tag{6.3.20}$$

となり，QL_0Q^{-1} は対称行列である．R は上三角なので，R^{-1} も上三角である．L_0 が三重対角であるので，対角線から下に 2 つ以上離れた成分は零であるが，この性質は上三角行列を右から掛けても左から掛けても保たれる．従って $L = RL_0R^{-1}$ も，対角線から下に 2 つ以上離れた成分は零となる．L が対称なので，これは L が三重対角であることを意味する．

$Q^{-1}Q = I$ の両辺を t で微分することにより

$$\frac{d\left(Q^{-1}\right)}{dt}Q + Q^{-1}\dot{Q} = 0, \tag{6.3.21}$$

すなわち

$$\frac{d\left(Q^{-1}\right)}{dt} = -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1} \tag{6.3.22}$$

を得る．これを用いて (6.3.17) を t で微分すると

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\left(Q^{-1}\right)}{dt}L_0Q + Q^{-1}L_0\dot{Q} \tag{6.3.23}$$

$$= -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}L_0Q + Q^{-1}L_0QQ^{-1}\dot{Q} \tag{6.3.24}$$

$$= \left[-Q^{-1}\dot{Q}, L\right] \tag{6.3.25}$$

となる．従って，

$$A = -Q^{-1}\dot{Q} \tag{6.3.26}$$

とおいた時に，A が (6.3.14) で定義される M と一致することを示せばよい．Q の直交性

$$QQ^T = I \tag{6.3.27}$$

の両辺を t で微分して得られる

$$\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0 \tag{6.3.28}$$

から

$$Q^{-1}\dot{Q} = -\dot{Q}^T\left(Q^T\right)^{-1} = -\left(Q^{-1}\dot{Q}\right)^T, \tag{6.3.29}$$

すなわち $A = -Q^{-1}\dot{Q}$ が反対称行列であることが分かる．一方，(6.3.18) を t で微分して得られる

$$\dot{Q} = -e^{-L_0t}L_0R^{-1} - e^{-L_0t}R^{-1}\dot{R}R^{-1} \tag{6.3.30}$$

$$= -QRL_0R^{-1} - QRR^{-1}\dot{R}R^{-1} \tag{6.3.31}$$

$$= -QL - Q\dot{R}R^{-1} \tag{6.3.32}$$

の両辺に左から $-Q^{-1}$ を掛けることによって

$$A = L + \dot{R}R^{-1} \tag{6.3.33}$$

を得る．ここで，R が上三角行列なので $\dot{R}$ および $\dot{R}R^{-1}$ も上三角行列であり，従って A と L の対角成分を除く下三角部分は一致する．このことと A の反対称性から $A = M$ が分かり，定理 6.3.1 は証明された． □

6.4 R 行列と古典的 Yang–Baxter 方程式

Lie 環 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ に対し，$\mathfrak{g}$ の線形自己準同型 $R \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ が R 行列 (R-matrix) であるとは，

$$[X,Y]_R = \frac{1}{2}([RX,Y] + [X,RY]) \tag{6.4.1}$$

で定義される双線形写像 $[-,-]_R \colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ に Lie 環の構造を定めることを指す．

任意の $R \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ に対し，(6.4.1) で定義される $[-,-]_R$ が交代性を持つのは明らかである．与えられた $R \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ に対し，線形写像 $B_R \colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$B_R(X,Y) = [RX,RY] - R([RX,Y] + [X,RY]) \tag{6.4.2}$$

で定める．

$$\begin{aligned}
4[[X,Y]_R, Z]_R &= 2[[RX,Y] + [X,RY], Z]_R \\
&= 2[[RX,Y],Z]_R + 2[[X,RY],Z]_R \\
&= [R[RX,Y],Z] + [[RX,Y],RZ] \\
&\quad + [R[X,RY],Z] + [[X,RY],RZ] \\
&= [R[RX,Y],Z] + [R[X,RY],Z] \\
&\quad + [[RX,Y],RZ] + [[X,RY],RZ] \\
&= [R[RX,Y],Z] + [R[X,RY],Z] \\
&\quad - [[Y,RZ],RX] - [[RZ,RX],Y] + [[X,RY],RZ] \\
&= -[[RZ,RX],Y] + [R[RX,Y],Z] + [R[X,RY],Z] \\
&\quad - [[Y,RZ],RX] + [[X,RY],RZ]
\end{aligned}$$

を (X,Y,Z) に関して巡回置換して得られる 3 つの式の和を取ることによって，$[-,-]_R$ に対する Jacobi 恒等式は

$$[B_R(X,Y),Z] + [B_R(Y,Z),X] + [B_R(Z,X),Y] = 0 \tag{6.4.3}$$

と書き直される．これが成り立つためには，例えば R が**古典的 Yang–Baxter 方程式** (classical Yang–Baxter equation)

$$B_R(X,Y)=0, \qquad \forall X,Y\in\mathfrak{g} \tag{6.4.4}$$

を満たせばよい.

古典的 Yang–Baxter 方程式を理解するために，$\mathfrak{g}$ の内積

$$(-,-):\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{R} \tag{6.4.5}$$

で $\mathfrak{g}$ の随伴作用に関する不変性

$$([X,Y],Z)+(X,[Y,Z])=0, \quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{g} \tag{6.4.6}$$

を満たすものが存在すると仮定して，この内積に関する正規直交基底 $\{E_i\}_i$ を取る;

$$(E_i,E_j)=\delta_{ij}. \tag{6.4.7}$$

この基底に関する Lie 環の構造定数 $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ を

$$c_{ijk}:=(E_i,[E_j,E_k]) \tag{6.4.8}$$

とおくと，Lie 括弧の反対称性から，c_{ijk} は j と k の入れ替えについて反対称である:

$$c_{ijk}=(E_i,[E_j,E_k])=-(E_i,[E_k,E_j])=-c_{ikj}. \tag{6.4.9}$$

さらに，内積 $(-,-)$ の随伴不変性から，c_{ijk} は i と k の入れ替えについても反対称である:

$$c_{ijk}=(E_i,[E_j,E_k])=-([E_j,E_i],E_k)=-(E_k,[E_j,E_i])=-c_{kji}. \tag{6.4.10}$$

R 行列を成分で

$$R(E_j)=\sum_i r_{ij}E_i \tag{6.4.11}$$

と表し，$r_{12},r_{13},r_{23},r_{32}\in U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ を

$$r_{12}=\sum_{i,j} r_{ij}E_i\otimes E_j\otimes 1, \tag{6.4.12}$$

$$r_{13}=\sum_{i,j} r_{ij}E_i\otimes 1\otimes E_j, \tag{6.4.13}$$

$$r_{23}=\sum_{i,j} r_{ij}1\otimes E_i\otimes E_j, \tag{6.4.14}$$

$$r_{32}=\sum_{i,j} r_{ij}1\otimes E_j\otimes E_i \tag{6.4.15}$$

で定義すると，

$$
\begin{aligned}
R([RE_j, E_k]) &= R\left(\left[\sum_l r_{lj} E_l, E_k\right]\right) \\
&= \sum_l r_{lj} R\left([E_l, E_k]\right) \\
&= \sum_l r_{lj} R\left(\sum_m c_{mlk} E_m\right) \\
&= \sum_{l,m} c_{mlk} r_{lj} R(E_m) \\
&= \sum_{l,m} c_{mlk} r_{lj} \sum_i r_{im} E_i \\
&= \sum_{l,m} c_{mlk} r_{im} r_{lj} E_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[r_{13}, r_{32}] &= \left[\sum_{i,m} r_{im} E_i \otimes 1 \otimes E_m, \sum_{j,l} r_{lj} 1 \otimes E_j \otimes E_l\right] \\
&= \sum_{i,j,l,m} r_{im} r_{lj} E_i \otimes E_j \otimes [E_m, E_l] \\
&= \sum_{i,j,k,l,m} r_{im} r_{lj} c_{kml} E_i \otimes E_j \otimes E_k
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
c_{kml} = -c_{mkl} = c_{mlk} \tag{6.4.16}
$$

に注意すると，

$$
(E_i, R([RE_j, E_k])) = (E_i \otimes E_j \otimes E_k, [r_{13}, r_{32}]) \tag{6.4.17}
$$

が分かる．同様に，

$$
R([E_j, RE_k]) = R\left[E_j, \sum_l r_{lk} E_l\right] \tag{6.4.18}
$$

$$
= \sum_{l,m} r_{lk} c_{mjl} R(E_m) \tag{6.4.19}
$$

$$
= \sum_{i,l,m} r_{im} r_{lk} c_{mjl} E_i, \tag{6.4.20}
$$

$$
[r_{12}, r_{23}] = \left[\sum_{i,m} r_{im} E_i \otimes E_m \otimes 1, \sum_{l,k} r_{lk} 1 \otimes E_l \otimes E_k\right] \tag{6.4.21}
$$

$$
= \sum_{i,j,k,l,m} r_{im} r_{lk} c_{jml} E_i \otimes E_j \otimes E_k \tag{6.4.22}
$$

より

$$(E_i, R([E_j, RE_k])) = -(E_i \otimes E_j \otimes E_k, [r_{12}, r_{23}]) \tag{6.4.23}$$

であり，

$$[R(E_j), R(E_k)] = \left[\sum_l r_{lj} E_l, \sum_m r_{mk} E_m\right] \tag{6.4.24}$$

$$= \sum_{i,l,m} r_{lj} r_{mk} c_{ilm} E_i, \tag{6.4.25}$$

$$[r_{12}, r_{13}] = \left[\sum_l r_{lj} E_l \otimes E_j \otimes 1, \sum_m r_{mk} E_m \otimes 1 \otimes E_k\right] \tag{6.4.26}$$

$$= \sum_{i,l,m} c_{ilm} r_{lj} r_{mk} E_i \otimes E_j \otimes E_k \tag{6.4.27}$$

より，

$$(E_i, [R(E_j), R(E_k)]) = (E_i \otimes E_j \otimes E_k, [r_{12}, r_{13}]) \tag{6.4.28}$$

である．従って，古典的 Yang–Baxter 方程式は

$$[r_{12}, r_{13}] - [r_{13}, r_{32}] + [r_{12}, r_{23}] = 0 \tag{6.4.29}$$

と書き直される．ここで R 行列の反対称性

$$(X, R(Y)) = -(Y, R(X)) \tag{6.4.30}$$

を仮定すると，

$$r_{32} = -r_{23} \tag{6.4.31}$$

となり，古典的 Yang–Baxter 方程式は

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \tag{6.4.32}$$

で与えられる．

一方，A が量子群（あるいはより一般に準三角 Hopf 代数）である時，$R \in A \otimes A$ が存在して，$A \otimes A \otimes A$ における Yang–Baxter 方程式

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \tag{6.4.33}$$

を満たすのであった．A が形式冪級数環 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 上定義されていて，R が

$$R = 1 + \hbar r + \hbar^2 s + o(\hbar^3) \tag{6.4.34}$$

という形をしている時，$\hbar$ の 3 次以上の項を無視すると，

$$
\begin{aligned}
&R_{12}R_{13}R_{23}\\
&\qquad = \left(1+\hbar r_{12}+\hbar^2 s_{12}\right)\left(1+\hbar r_{13}+\hbar^2 s_{13}\right)\left(1+\hbar r_{23}+\hbar^2 s_{23}\right)\\
&\qquad = 1+\hbar(r_{12}+r_{13}+r_{23})\\
&\qquad\qquad + \hbar^2(r_{12}r_{13}+r_{12}r_{23}+r_{13}r_{23}+s_{12}+s_{13}+s_{23}),\\
&R_{23}R_{13}R_{12}\\
&\qquad = 1+\hbar(r_{23}+r_{13}+r_{12})\\
&\qquad\qquad + \hbar^2(r_{23}r_{13}+r_{23}r_{12}+r_{13}r_{12}+s_{23}+s_{13}+s_{12})
\end{aligned}
$$

より，

$$
r_{12}r_{13}+r_{12}r_{23}+r_{13}r_{23} = r_{23}r_{13}+r_{23}r_{12}+r_{13}r_{12} \tag{6.4.35}
$$

となるが，これは古典的 Yang–Baxter 方程式そのものである．

6.5 AKS の定理

Lie 環 $\mathfrak{g}$ に R 行列 $R \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が与えられている時，ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に (6.4.1) によって Lie 環の構造を入れたものを $\mathfrak{g}_R$ で表す．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の R 行列 R が与えられると，双対空間 $\mathfrak{g}^*$ に 2 つの Lie–Poisson 構造 $\{-,-\}$ と $\{-,-\}_R$ が定まる．Poisson 多様体 $(M,\{-,-\})$ が与えられた時，M 上の関数で任意の関数と Poisson 可換なものを **Casimir 関数** (Casimir function) と呼ぶ．Lie–Poisson 多様体 $(\mathfrak{g}^*,\{-,-\})$ 上の Casimir 関数全体のなす環を $I(\mathfrak{g})$ で表す．

命題 6.5.1. $\mathfrak{g}^*$ 上の関数 φ が $I(\mathfrak{g})$ に属するための必要十分条件は，φ が G の余随伴作用で不変なことである．

証明．定義から，$\mathfrak{g}^*$ 上の関数 φ が $I(\mathfrak{g})$ に属するための必要十分条件は，任意の $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対し

$$
\{H,\varphi\}(\xi) = \langle[(dH)_\xi,(d\varphi)_\xi],\xi\rangle = 0 \tag{6.5.1}
$$

が成り立つことである．自然な同型 $T^*_\xi\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ によって $(dH)_\xi \in T^*_\xi\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の元とみなしたものを X とおくと，この条件は

$$
\langle[X,(d\varphi)_\xi],\xi\rangle = \langle \mathrm{ad}_X(d\varphi)_\xi,\xi\rangle = 0 \tag{6.5.2}
$$

と書き直される．任意の $X \in \mathfrak{g}$ は適当な $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ によって $X = (dH)_\xi$ と表されるので，(6.5.2) は任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して成り立たなければならないが，これは φ が G の余随伴作用で不変なことを意味する． □

(6.5.2) は，任意の $\xi \in \mathfrak{g}^*$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\left\langle X, \mathrm{ad}^*_{(d\varphi)_\xi} \xi \right\rangle = 0, \tag{6.5.3}$$

すなわち任意の $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して

$$\mathrm{ad}^*_{(d\varphi)_\xi} \xi = 0 \tag{6.5.4}$$

とも言い換えられる．

$I(\mathfrak{g})$ の関数的に独立な元の個数を l とおく．$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 環の時，l は $\mathfrak{g}$ の階数に一致する．

次の定理は発見者の名前の頭文字を並べて **AKS の定理** (AKS theorem) と呼ばれる:

定理 6.5.2 (Adler–Kostant–Symmes). $\varphi \in I(\mathfrak{g})$ の $\{-,-\}_R$ に関する Hamilton 流は，$L \in \mathfrak{g}^*$ に対し

$$\frac{dL}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*_M L, \quad M = \frac{1}{2}R(d\varphi)_L \tag{6.5.5}$$

で与えられる．

証明. $\psi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対する運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt}(L) &= \{\varphi, \psi\}_R(L) &(6.5.6)\\
&= \langle L, [(d\varphi)_L, (d\psi)_L]_R \rangle &(6.5.7)\\
&= \left\langle L, \frac{1}{2}\left([R(d\varphi)_L, (d\psi)_L] + [(d\varphi)_L, R(d\psi)_L]\right) \right\rangle &(6.5.8)\\
&= \left\langle L, \frac{1}{2}[R(d\varphi)_L, (d\psi)_L] \right\rangle &(6.5.9)\\
&= \frac{1}{2}\left\langle L, \mathrm{ad}_{R(d\varphi)_L}(d\psi)_L \right\rangle &(6.5.10)\\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \mathrm{ad}^*_{R(d\varphi)_L} L, (d\psi)_L \right\rangle &(6.5.11)
\end{aligned}$$

となる．ここで，(6.5.8) から (6.5.9) への変形には $\varphi \in I(\mathfrak{g})$ から来る (6.5.2) を使った． □

次の系は**包合性定理** (involutivity theorem) と呼ばれる:

系 6.5.3. 任意の $\varphi, \psi \in I(\mathfrak{g})$ に対し $\{\varphi, \psi\}_R = 0$ である．

AKS の定理は，R 行列型の Lie–Poisson 多様体上の Casimir 関数による Hamilton 流が Lax 形式による記述を持つことを主張する:

系 6.5.4. $\mathfrak{g}$ が非退化な不変内積を持つ時，この内積によって $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると，$\varphi \in I(\mathfrak{g})$ を Hamilton 関数とする Hamilton 系は Lax 表示

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \tag{6.5.12}$$

を持つ．

従って，$\mathfrak{g}^*$ の $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{g}_R}$ 軌道 $\mathcal{O}$ が $2l$ 次元であり，$I(\mathfrak{g})$ の関数的に独立な元たちを $\mathcal{O}$ に制限したものが再び関数的に独立であれば，$I(\mathfrak{g})$ の任意の元 φ に対し，φ を Hamilton 関数とする $\mathcal{O}$ 上の Hamilton 系は，Lax 表示を持つ Liouville 可積分系になる．

6.6 因子化定理

Lie 環 $\mathfrak{g}$ がベクトル空間として 2 つの部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ の直和になっている場合を考える:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-. \tag{6.6.1}$$

これはベクトル空間としての直和分解であり，Lie 環としての直和分解ではないので，$[\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+] \subset \mathfrak{g}_+$ かつ $[\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_-$ だが，$[\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-] = 0$ とは限らない．$P_\pm \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_\pm$ を直和分解 (6.6.1) に付随する射影作用素とし，$R = P_+ - P_-$ とおくと，(6.4.1) より

$$[X, Y]_R = \frac{1}{2}([RX, Y] + [X, RY]) \tag{6.6.2}$$

$$= \frac{1}{2}([X_+ - X_-, Y_+ + Y_-] + [X_+ + X_-, Y_+ - Y_-]) \tag{6.6.3}$$

$$= [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] \tag{6.6.4}$$

となる．ただし，ここで

$$X_\pm = P_\pm X, \quad Y_\pm = P_\pm Y \tag{6.6.5}$$

とおいた．これは明らかに $\mathfrak{g}$ に Lie 環の構造を定めるので，R は R 行列になる．一方，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ に対応して，Lie 群 G の部分 Lie 群 G_+ と G_- が定まる．

定理 6.6.1. $\varphi \in I(\mathfrak{g})$ と $L_0 \in \mathfrak{g}^*$ を選んで固定し，$X_0 = (d\varphi)_{L_0} \in \mathfrak{g}$ とおく．さらに，ある $g_+ \colon \mathbb{R} \to G_+$ と $g_- \colon \mathbb{R} \to G_-$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\exp(tX_0) = g_+(t)^{-1} g_-(t) \tag{6.6.6}$$

が成り立つと仮定する．この時，L_0 を初期値とし，φ を Hamilton 関数とする Hamilton 流は

$$L(t) = \mathrm{Ad}^*_{g_+(t)} L_0 \tag{6.6.7}$$

で与えられる．

証明．一般に $g\colon \mathbb{R} \to G$ が与えられた時，

$$gg^{-1} = e \tag{6.6.8}$$

の両辺を t で微分することによって，

$$\dot{g}g^{-1} + g\frac{d(g^{-1})}{dt} = 0 \tag{6.6.9}$$

すなわち

$$\frac{d(g^{-1})}{dt} = -g^{-1}\dot{g}g^{-1} \tag{6.6.10}$$

となる．定数 $X_0 \in \mathfrak{g}$ に対し

$$X = \operatorname{Ad}_{g^{-1}} X_0 = g^{-1}X_0 g \tag{6.6.11}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \frac{dg^{-1}}{dt}X_0 g + g^{-1}X_0\dot{g} && (6.6.12)\\
&= -g^{-1}\dot{g}g^{-1}X_0 g + g^{-1}X_0\dot{g} && (6.6.13)\\
&= -g^{-1}(\dot{g}g^{-1}X_0 - X_0\dot{g}g^{-1})g && (6.6.14)\\
&= -\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\operatorname{ad}_{\dot{g}g^{-1}} X_0 && (6.6.15)
\end{aligned}$$

となる．ここで $\dot{g} \in T_g G$ であり，従って $\dot{g}g^{-1} \in T_e G = \mathfrak{g}$ であることに注意せよ．さて，余随伴表現の定義

$$\left\langle \operatorname{Ad}_g^* \xi_0, X_0 \right\rangle = \left\langle \xi_0, \operatorname{Ad}_{g^{-1}} X_0 \right\rangle \tag{6.6.16}$$

の両辺を t で微分すると，

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\operatorname{Ad}_g^* \xi_0, X_0 \right\rangle &= \left\langle \xi_0, -\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\operatorname{ad}_{\dot{g}g^{-1}} X_0 \right\rangle && (6.6.17)\\
&= \left\langle \operatorname{Ad}_g^* \xi_0, -\operatorname{ad}_{\dot{g}g^{-1}} X_0 \right\rangle && (6.6.18)\\
&= \left\langle \operatorname{ad}_{\dot{g}g^{-1}}\operatorname{Ad}_g^* \xi_0, X_0 \right\rangle && (6.6.19)
\end{aligned}$$

を得る．すなわち，定数 $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ に対し

$$\xi = \operatorname{Ad}_g^* \xi_0 \tag{6.6.20}$$

とおくと，

$$\dot{\xi} = \operatorname{ad}_{\dot{g}g^{-1}} \xi \tag{6.6.21}$$

となる．従って，(6.6.7) を微分すると

$$\dot{L} = \operatorname{ad}^*_{\dot{g}_+ g_+^{-1}} L \tag{6.6.22}$$

となる．

一般に，Lie 群 G が多様体 M に作用していて，M 上の関数 f が G の作用で不変である時，任意の $X \in T_xM$ と $g \in G$ に対して

$$(df)_{gx}(g_*X) = (df)_x(X) \tag{6.6.23}$$

となる．これを言い換えると

$$(df)_{gx} = (g^{-1})^*(df)_x \tag{6.6.24}$$

となる．$\mathrm{Ad}_g^*\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ が $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の転置であることに注意しながら (6.6.24) を $\mathfrak{g}^*$ 上の Ad_G^* 不変な関数 φ に適用すると，

$$(d\varphi)_{L(t)} = (d\varphi)_{\mathrm{Ad}_{g_+}^* L_0} \tag{6.6.25}$$

$$= \mathrm{Ad}_{g_+}(d\varphi)_{L_0} \tag{6.6.26}$$

$$= \mathrm{Ad}_{g_+} X_0 \tag{6.6.27}$$

を得る．一方，(6.6.6) の両辺を t で微分すると

$$X_0 \exp(tX_0) = \frac{dg_+^{-1}}{dt} g_- + g_+^{-1}\frac{dg_-}{dt} \tag{6.6.28}$$

$$= -g_+^{-1}\dot{g}_+ g_+^{-1} g_- + g_+^{-1}\dot{g}_- \tag{6.6.29}$$

となる．従って，

$$X_0 g_+^{-1} g_- = -g_+^{-1}\dot{g}_+ g_+^{-1} g_- + g_+^{-1}\dot{g}_- \tag{6.6.30}$$

となるが，この両辺に左から g_+，右から g_-^{-1} を掛けて

$$g_+ X_0 g_+^{-1} = -\dot{g}_+ g_+^{-1} + \dot{g}_- g_-^{-1} \tag{6.6.31}$$

すなわち

$$\mathrm{Ad}_{g_+} X_0 = -\dot{g}_+ g_+^{-1} + \dot{g}_- g_-^{-1} \tag{6.6.32}$$

を得る．ここで，

$$\dot{g}_+ g_+^{-1} \in \mathfrak{g}_+, \quad \dot{g}_- g_-^{-1} \in \mathfrak{g}_- \tag{6.6.33}$$

なので，

$$\left(\mathrm{Ad}_{g_+} X_0\right)_+ = -\dot{g}_+ g_+^{-1} \tag{6.6.34}$$

となる．(6.6.27) と (6.6.34) より，

$$((d\varphi)_L)_+ = -\dot{g}_+ g_+^{-1} \tag{6.6.35}$$

を得る．一方，φ が Casimir 関数なので，(6.5.4) より

$$0 = \mathrm{ad}^*_{(d\varphi)_\xi}\,\xi \tag{6.6.36}$$

$$= \mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_\xi)_+ + ((d\varphi)_\xi)_-}\,\xi \tag{6.6.37}$$

$$= \mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_\xi)_+}\,\xi + \mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_\xi)_-}\,\xi \tag{6.6.38}$$

であり，従って

$$\mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_\xi)_-}\,\xi = -\,\mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_\xi)_+}\,\xi \tag{6.6.39}$$

である．これを使って，

$$-\,\mathrm{ad}^*_M\,L = -\,\mathrm{ad}^*_{\frac{1}{2}R(d\varphi)_L}\,L \tag{6.6.40}$$

$$= -\,\mathrm{ad}^*_{\frac{1}{2}(((d\varphi)_L)_+ - ((d\varphi)_L)_-)}\,L \tag{6.6.41}$$

$$= -\,\mathrm{ad}^*_{((d\varphi)_L)_+}\,L \tag{6.6.42}$$

$$= \mathrm{ad}^*_{\dot{g}_+ g_+^{-1}}\,L \tag{6.6.43}$$

となる．ここで，最初の等号は M の定義，次の等号は R の定義，その次の等号は (6.6.39)，最後の等号は (6.6.35) を使った．これと (6.6.22) を比較することによって，定理 6.6.1 は証明された． □

6.7 戸田格子再訪

Lie 環 $\mathfrak{g}$ がベクトル空間としての直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i \tag{6.7.1}$$

を持ち，

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \tag{6.7.2}$$

を満たす時，**次数付き Lie 環** (graded Lie algebra) と呼ばれる．次数付き Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\mathfrak{g}_+ := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_- := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_{-i} \tag{6.7.3}$$

とおく．$\mathfrak{g}_+$ および $\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環になるので，直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ に付随する射影を

$$P_\pm \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_\pm \tag{6.7.4}$$

とおいて，直和分解型の R 行列を

$$R = P_+ - P_- \tag{6.7.5}$$

で定める．Lie 環 $\mathfrak{g}_R$ の余随伴作用を $\mathrm{ad}_R{}^*$ で表す．

補題 6.7.1. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対し

$$\mathrm{ad}_{RX}^* \xi = (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi)_+ - (\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi)_- \tag{6.7.6}$$

となる.

証明. 直和分解 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_+^* \oplus \mathfrak{g}_-^*$ によって $\xi \in \mathfrak{g}^*$ を

$$\xi = \xi_+ + \xi_-, \quad \xi_\pm \in \mathfrak{g}_\pm^* \tag{6.7.7}$$

と分解すると,

$$\mathrm{ad}_{X_+} Y_+ = [X_+, Y_+] \in \mathfrak{g}_+ \tag{6.7.8}$$

より,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_-, Y_+ \right\rangle &= - \left\langle \xi_-, \mathrm{ad}_{X_+} Y_+ \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

すなわち,

$$(\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_-)_+ = 0 \tag{6.7.10}$$

である. 従って,

$$(\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi)_+ = (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_+)_+ + (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_-)_+ \tag{6.7.11}$$

$$= (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_+)_+ \tag{6.7.12}$$

である. 同様に,

$$(\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi)_- = (\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi_-)_- \tag{6.7.13}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi)_+ - (\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi)_- &= (\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi_+)_+ - (\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi_-)_- \\ &= \mathrm{ad}_{RX}^* \xi \end{aligned}$$

となる. □

従って, 次数付き Lie 環からくる直和分解型の R 行列に対し次が成り立つ:

系 6.7.2. 非負整数 m, n と $f \in \mathfrak{g}_{-m-1}^*$ に対し, $\mathfrak{g}^*$ のアファイン部分空間

$$f + \bigoplus_{i=-m}^{n-1} \mathfrak{g}_i^* \tag{6.7.14}$$

は Poisson 部分空間である.

証明．任意の $X \in \mathfrak{g}_i, \xi \in \mathfrak{g}_j^*$, および $Y \in \mathfrak{g}_k$ に対し，

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}_{i+k} \tag{6.7.15}$$

なので，

$$\langle \mathrm{ad}_X^* \xi, Y \rangle = -\langle \xi, \mathrm{ad}_X Y \rangle \tag{6.7.16}$$

は，$i + k = j$ の時のみ零でない値を取り得る．すなわち，

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}^* \mathfrak{g}_j^* \subset \mathfrak{g}_{j-i}^* \tag{6.7.17}$$

である．Lie–Poisson 括弧の定義より，Hamilton ベクトル場のなす接分布は，余随伴作用の基本ベクトル場たちで生成されているので，補題 3.6.4 より，$\mathfrak{g}^*$ のアファイン部分空間 (6.7.14) が $\mathrm{ad}_R{}^*$ 不変であることを示せばよい．任意の $X = X_+ + X_- \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ と $\xi \in f + \bigoplus_{i=-m}^{n-1} \mathfrak{g}_i^*$ に対し，(6.7.17) より

$$\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi \in \mathfrak{g}_{\leq n-1}^*, \quad \mathrm{ad}_{X_-}^* \xi \in \mathfrak{g}_{\geq -m}^* \tag{6.7.18}$$

である．従って

$$(\mathrm{ad}_{X_+}^* \xi)_+ \in \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{g}_i^*, \tag{6.7.19}$$

$$(\mathrm{ad}_{X_-}^* \xi)_- \in \bigoplus_{i=-m}^{-1} \mathfrak{g}_i^* \tag{6.7.20}$$

であり，これと (6.7.6) より，

$$\mathrm{ad}_R{}^*_X \xi \in \bigoplus_{i=-m}^{n-1} \mathfrak{g}_i^* \tag{6.7.21}$$

となる． □

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ とし，直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-n+1}^{n-1} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_i = \left\{ \sum_{k,l=1}^{n} X_{kl} E_{kl} \;\middle|\; l - k \neq i \text{ の時 } X_{kl} = 0 \right\} \tag{6.7.22}$$

を考える．すなわち，$\mathfrak{g}_i$ は対角成分から i だけ離れた成分以外は零であるような行列である．不変内積

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(XY) = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ji} \tag{6.7.23}$$

によって $\mathfrak{g}_i^*$ は $\mathfrak{g}_{-i}$ と同一視される．系 6.7.2 において $m = 0, n = 2$ とし，

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{-1}^* \tag{6.7.24}$$

とおくと，部分空間 (6.7.14) は

$$\left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^n b_i = 0 \right\} \tag{6.7.25}$$

となる．ここで，条件 $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\} \tag{6.7.26}$$

から来る．

命題 6.7.3. 部分空間 (6.7.25) 上の座標関数 a_i および b_j の Poisson 括弧は

$$\{a_i, a_j\}_R = \{b_i, b_j\}_R = 0, \quad \{a_i, b_j\}_R = (\delta_{i+1,j} - \delta_{ij})a_i \tag{6.7.27}$$

で与えられる．

証明. 部分空間 (6.7.25) を M とおき，M 上の点を $\xi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_n)$ と書く．座標関数 $a_i \in C^\infty(M)$ の点 $\xi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in M$ における微分 da_i は自然な埋め込み $T_\xi^* M \subset \mathfrak{g}$ によって $E_{i,i+1} \in \mathfrak{g}_1$ に対応する．Lie–Poisson 括弧の定義より，

$$\begin{aligned} \{a_i, a_j\}_R(\xi) &= \langle [da_i, da_j]_R, \xi\rangle && (6.7.28)\\ &= \langle [E_{i,i+1}, E_{j,j+1}]_R, \xi\rangle && (6.7.29)\\ &= \langle (E_{i,i+1}E_{j,j+1} - E_{j,j+1}E_{i,i+1})_+, \xi\rangle && (6.7.30)\\ &= \langle (\delta_{i+1,j}E_{i,j+1} - \delta_{j+1,i}E_{j,i+1})_+, \xi\rangle && (6.7.31)\\ &= \langle \delta_{i+1,j}E_{i,i+2} - \delta_{j+1,i}E_{j,j+2}, \xi\rangle && (6.7.32)\\ &= 0 && (6.7.33) \end{aligned}$$

となる．ここで，最後の等号は任意の i に対して ξ の $(i+2, i)$ 成分が零であることから来る．同様にして，

$$[E_{i,i}, E_{j,j}] = 0 \tag{6.7.34}$$

より

$$\{b_i, b_j\}_R(\xi) = \langle [db_i, db_j]_R, \xi \rangle = \langle [E_{ii}, E_{jj}]_R, \xi \rangle = 0 \tag{6.7.35}$$

であり，

$$[E_{i,i+1}, E_{jj}] = E_{i,i+1}E_{jj} - E_{jj}E_{i,i+1} \tag{6.7.36}$$

$$= \delta_{i+1,j}E_{ij} - \delta_{ji}E_{j,i+1} \tag{6.7.37}$$

$$= \delta_{i+1,j}E_{i,i+1} - \delta_{ij}E_{i,i+1} \tag{6.7.38}$$

$$= (\delta_{i+1,j} - \delta_{ij})E_{i,i+1} \tag{6.7.39}$$

より

$$\{a_i, b_j\}_R(\xi) = \langle [da_i, db_j]_R, \xi \rangle \tag{6.7.40}$$

$$= \langle [E_{i,i+1}, E_{jj}]_R, \xi \rangle \tag{6.7.41}$$

$$= \langle ((\delta_{i+1,j} - \delta_{ij})E_{i,i+1})_+, \xi \rangle \tag{6.7.42}$$

$$= (\delta_{i+1,j} - \delta_{ij})a_i \tag{6.7.43}$$

となる． □

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7.44}$$

とおいて，$e + f$ の (6.7.25) における $\mathrm{ad}_R{}^*$ 軌道を $\mathcal{O}$ とおくと，

$$\mathcal{O} = \left\{ \xi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;\middle|\; \text{任意の } i = 1, \ldots, n-1 \text{ に対して } a_i > 0 \text{ かつ } \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \right\}$$

となる．命題 6.7.3 より，$\mathcal{O}$ の Darboux 座標として

$$a_i = e^{q_i - q_{i+1}}, \quad b_i = p_i \tag{6.7.45}$$

が取れる．ただし，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \tag{6.7.46}$$

である．Hamilton 関数として Casimir 関数

$$H(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X^2) \tag{6.7.47}$$

を取ると，これは Darboux 座標で

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} \tag{6.7.48}$$

と表される．Lax 方程式 (6.5.12) は，

$$M_\pm = \frac{1}{2}(R+1)(d\varphi)_L \tag{6.7.49}$$

を用いて

$$\frac{dL}{dt} = [L, M_\pm] \tag{6.7.50}$$

と書き直せる．この時の Lax 対は

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e^{q_1-q_2} & p_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{q_2-q_3} & p_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{q_{n-2}-q_{n-1}} & p_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{q_{n-1}-q_n} & p_n \end{pmatrix}, \tag{6.7.51}$$

$$M_+ = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix}, \tag{6.7.52}$$

$$M_- = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e^{q_1-q_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{q_2-q_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{q_{n-1}-q_n} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.7.53}$$

となる．

戸田格子は一般の単純 Lie 環に対しても定義される．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \tag{6.7.54}$$

とし，Π を $\mathfrak{g}$ の単純ルートの集合とする．ルートの高さ関数を ht と書いて，$\mathfrak{g}_i := \bigoplus_{\mathrm{ht}(\alpha)=i} \mathfrak{g}_\alpha$ とおくと，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ は次数付き Lie 環になる．

$$f = \sum_{\alpha\in\Pi} e_\alpha \in \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{-1}^*, \quad e = \sum_{\alpha\in\Pi} e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathfrak{g}_1^* \tag{6.7.55}$$

に対し，$e+f$ の $\mathrm{ad}_R{}^*$ 軌道の元は

$$L = p + \sum_{\alpha\in\Pi} e^{(\alpha,q)} e_\alpha + e \tag{6.7.56}$$

と表されて，Hamilton 関数

$$H(\xi) = \frac{1}{2}(\xi,\xi) \tag{6.7.57}$$

は

$$H = \frac{1}{2}(p,p) + \sum_{\alpha\in\Pi} (e_\alpha, e_{-\alpha}) e^{(\alpha,q)} \tag{6.7.58}$$

と表される．

この節における戸田格子の構成は Lie 群の Bruhat 分解に対応する．一方，6.3 節における構成は Lie 群の岩澤分解に対応している．これらの 2 つの構成の間に関係を付けることもできるが，これについては例えば [110, II.3.2] を見よ．

第 7 章
Hamilton 力学系

前章では可積分系について議論したが，Hamilton 系の解が明示的に書けるのは極めて稀である．また，Hamilton 系の時間発展はしばしば初期値に鋭敏に依存する．これは長時間に渡る軌道の予言を事実上不可能にするので，研究は必然的に系の定性的な振る舞いに向かう．この分野は力学系と呼ばれ，天体力学の研究の過程で 1880 年代に Poincaré によって創始された．

可積分系ではないが，可積分系に非常に近い系を調べることは，Poincaré によって力学の基本問題と呼ばれた．この方面での 20 世紀最大の成果は Kolmogorov，Arnold および Moser の 3 人の名を冠して呼ばれる所謂 KAM 理論である．また，系の振る舞いの複雑さを逆手に取って，個々の軌道の代わりに系の長時間での平均的な挙動を調べるというアイデアはエルゴード理論に結実した．この章ではこれらの話題について表面的に紹介する．

7.1 力学系

力学系 (dynamical system) とは，集合 M と可換なモノイド T，それに関数 $\Phi\colon T \times M \to M$ からなる 3 つ組 (M, T, Φ) で，T の単位元 0 と任意の $x \in M$ に対して

$$\Phi(0, x) = x \tag{7.1.1}$$

を満たし，任意の $s, t \in T$ と $x \in M$ に対して

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) \tag{7.1.2}$$

を満たすようなものを指す．通常 M には様々な付加構造を込めて考え，それに応じて (M, T, Φ) の名前も変わる．M が位相空間で Φ が連続写像の時には，(M, T, Φ) は**位相力学系** (topological dynamical system) と呼ばれ，M が測度空間で，任意の $t \in T$ に対して $\Phi(t, -)\colon M \to M$ が保測変換の時には，

(M,T,Φ) は**保測力学系** (measure-preserving dynamical system) と呼ばれる．また，T が $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ などの離散モノイドの時には (M,T,Φ) は**離散時間の力学系** (discrete-time dynamical system) と呼ばれ，$\mathbb{R}^{\geq 0}$ や $\mathbb{R}$ などの位相モノイドの時には**連続時間の力学系** (continuous-time dynamical system) と呼ばれる．M がシンプレクティック多様体であり，$T = \mathbb{R}$ で，Φ が M 上の関数による Hamilton 流で与えられる時，(M,T,Φ) を **Hamilton 力学系** (Hamiltonian dynamical system) と呼ぶ．

力学系 (M,T,Φ) が与えられた時，M の部分集合 S で，任意の $t \in T$ に対して $\Phi(t,S) \subset S$ が成り立つ時，S を**不変集合** (invariant set) と呼ぶ．特に M が多様体で，S がトーラスと同相な M の部分多様体の時，S を**不変トーラス** (invariant torus) と呼ぶ．Liouville–Arnold の定理から，Hamilton 力学系の不変部分集合の中でトーラスは特別な地位を占めている．Liouville–Arnold の定理から来る完全可積分系の不変トーラスを **Liouville トーラス** (Liouville torus) と呼ぶのであった．

7.2 近可積分系と摂動論

太陽系は太陽，惑星，衛星，矮惑星，小惑星，彗星などの極めて多数の天体からなる大自由度の系であり，その時間発展を調べる為の手法を開発する事は理論家にとって大きな挑戦である．また，小惑星や彗星の衝突が大量絶滅 (extinction event) を引き起こす可能性がある事から，それらの軌道の正確な計算は人類の存続にとっての実用上の価値も持つ．

多体問題を扱うための伝統的な手法は**摂動論** (perturbation theory) である．これは，解ける系に小さなパラメーターを持つ項を加えて，この小さなパラメーターに関する級数展開を行い，その最初の数項を計算する事で，何らかの有意義な知見を引き出そうというものである．非摂動系が可積分系であると仮定して，その作用・角座標を $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$ とおくと，この座標系においてシンプレクティック形式は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\varphi_i \tag{7.2.1}$$

となり，非摂動 Hamilton 関数 H_0 は $\boldsymbol{I}$ のみの関数になる．ここに微小パラメーター ϵ に関して実解析的な摂動を加えた

$$H_\epsilon = H_0(\boldsymbol{I}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi},\epsilon) \tag{7.2.2}$$

を Hamilton 関数として持つ Hamilton 系

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \varphi_i} \tag{7.2.3}$$

の研究を，Poincaré は力学の基本問題と呼んだ．Poincaré による否定定理によって，一般の摂動 Hamilton 関数 H_ϵ に対しては，H_ϵ と関数的に独立かつ Poisson 可換で，しかも ϵ に関して解析的な関数は存在しない事が知られている．

非摂動系における準周期解の周りで微小パラメーター ϵ に関する単純な冪級数として形式的な解を求めると，所謂永年項 (secular term) の為に，近似の誤差が時間とともに際限なく大きくなる．Poincaré–Lindsted による改良された摂動論では，摂動パラメーター ϵ に依存する振動数を導入することにより，この問題を回避する．その結果として得られる級数の係数の分母には $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k}$ の形の項が現れるが，これは $\boldsymbol{\omega}$ の成分の線形結合が有理数であれば十分大きな $\boldsymbol{k}$ に対して 0 を与えるので，級数が意味を為さなくなる．これを共鳴 (resonance) と呼ぶ．もし $\boldsymbol{\omega}$ の成分が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であれば，$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k}$ は任意の $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して零にはならないが，いくらでも小さくなる事によって摂動級数の収束を危険に晒す．これが所謂小さな分母 (small divisor) の問題である．KAM 理論の真髄は，

- 初期条件を固定して摂動パラメーターに依存する振動数を考える代わりに，振動数を固定して摂動パラメーターに依存する初期条件を考える事
- 冪級数展開ではなく，それより遥かに収束の早い Newton 法を用いる事によって，剰余項の増大を押さえる事

の 2 点である．これによって小さな分母の問題を克服し，次節に述べる結果を得ることができる．

7.3 KAM の定理

非摂動 Hamilton 関数 H_0 は作用変数 $\boldsymbol{I}$ の関数であるが，その定義域 D が $\mathbb{R}^n$ の有界領域であるとする．写像

$$\boldsymbol{I}\mapsto\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}):=\frac{\partial H_0}{\partial\boldsymbol{I}} \tag{7.3.1}$$

が D から $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω への微分同相写像を与える時，H_0 は**非退化** (non-degenerate) と呼ばれる．実数 $\tau>n-1$ と $\gamma>0$ に対し，

$$\Omega(\tau,\gamma,n)=\left\{\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\geq\frac{\gamma}{(|k_1|+\cdots+|k_n|)^\tau}\right\} \tag{7.3.2}$$

とおく．振動数ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対する Diophantus 的条件は，$\boldsymbol{\omega}$ が有理数による良い近似を持たない事を主張し，$\boldsymbol{\omega}$ が強い意味で非共鳴的 (non-resonant) であることを意味している．与えられた Hamilton 系に対し，振動数ベクトル $\boldsymbol{\omega}\in\Omega(\tau,\gamma,n)$ を持つ準周期軌道を乗せた n 次元不変トーラスを **KAM トーラス** (KAM torus) と呼ぶ．

定理 7.3.1 (KAM の定理)．非摂動 Hamilton 関数 H_0 が非退化であれば，ある

正数ϵ_0が存在して，任意の$\epsilon < \epsilon_0$と任意の$\boldsymbol{\omega} \in \Omega(\tau, \gamma, n)$に対して，Hamilton 関数$H_\epsilon$に付随する近可積分系は振動数ベクトル$\boldsymbol{\omega}$の KAM トーラスを持つ．さらに，KAM トーラスの集合は横断方向において正の Lebesgue 速度を持つ Cantor 集合をなし，その補集合の測度は$\epsilon \to 0$で 0 に収束する．

この定理の本質的な部分は Kolmogorov によって得られ（[76]），1954 年の国際数学者会議で発表された（[77]）．その詳しい証明は，Hamilton 関数が実解析的であるという仮定の下で Arnold [7] によって与えられ，Moser [98] によって滑らかな場合に拡張された．この定理は，非退化な可積分系に対しては，Hamilton 系の定性的な性質が小さな摂動によって大きく変わらない事を主張している．

7.4 Liouville の定理

$2n$次元のシンプレクティック多様体(M,ω)に対し，ω^nはMの測度を定めるが，これをシンプレクティック形式ωの定めるMの自然な測度と呼ぶ．

定理 7.4.1 (Liouville)**.** シンプレクティック多様体(M,ω)上の Hamilton 力学系は，シンプレクティック形式の定める自然な測度に関して保測力学系をなす．

言い換えると，任意のシンプレクティック多様体上の任意の Hamilton 関数に対し，それに付随する Hamilton 流は自然な測度に関する保測変換を与える．これは，Hamilton 流がシンプレクティック形式ωを保つので，必然的にそのn階外積ω^nも保つ事から明らかである．この事実は **Liouville の定理** (Liouville's theorem) と呼ばれる．証明は自明であるが，この定理はエルゴード理論を Hamilton 力学系に適用する根拠であり，Hamilton 力学系の研究にとって基本的である．

7.5 Poincaré の再帰定理

全測度が 1 の測度空間を**確率空間** (probability space) と呼ぶ．全測度が有限の測度空間は，規格化して確率空間にできる事に注意せよ．保測性から導かれる重要な結論として，**Poincaré の再帰定理** (Poincaré recurrence theorem) がある．

定理 7.5.1 (Poincaré)**.** 任意の確率空間$(X, \mathfrak{F}, \mu)$と任意の保測変換$T\colon X \to X$，それに任意の可測集合$B \in \mathfrak{F}$に対し，$\mu(B) > 0$ならば，殆ど全ての$x \in B$に対し$\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in B\}$は無限集合になる．

証明．n回目以降はBに交わらない点からなる集合はBの補集合の$T^k\colon X \to X$

による逆像の交叉

$$E_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} T^{-k}(X \setminus B) \tag{7.5.1}$$

である．定義から

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \tag{7.5.2}$$

となる事に注意せよ．その極限を

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \tag{7.5.3}$$

とおくと，示すべき主張は

$$\mu(E \cap B) = 0 \tag{7.5.4}$$

である．定義から $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$ なので，T が保測変換である事を用いると

$$\mu(E_{n+2} \setminus E_{n+1}) = \mu(T^{-1}(E_{n+1} \setminus E_n)) = \mu(E_{n+1} \setminus E_n) \tag{7.5.5}$$

となる．測度の完全加法性から

$$\mu(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_{n+1} \setminus E_n) + \mu(E_0) \tag{7.5.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_1 \setminus E_0) + \mu(E_0) \tag{7.5.7}$$

なので，$\mu(E_1 \setminus E_0) = 0$ かつ $\mu(E) = \mu(E_0)$ となる．従って

$$\mu(E \cap B) = \mu(E_0 \cap B) \tag{7.5.8}$$

であるが，$E_0 \cap B$ は定義から明らかに空集合なので，$\mu(E \cap B) = 0$ となる．□

従って，任意のコンパクトなシンプレクティック多様体 (M, ω) と M 上の任意の Hamilton 関数 H，それに任意の開集合 $U \subset M$ が与えられた時，殆ど全ての $p \in U$ に対して，p から始まる Hamilton 流は無限回 U に再帰する事が分かる．

7.6 エルゴード定理

確率空間 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ 上の保測変換 T に対し，T の不変 σ 加法族 (invariant σ-field) を

$$\mathfrak{G} = \{A \in \mathfrak{F} \mid T^{-1}(A) = A\} \tag{7.6.1}$$

で定義する．不変 σ 加法族 $\mathfrak{G}$ が自明である時，保測変換 T は**エルゴード的** (ergodic) と呼ばれる．$\mathfrak{F}$ 可測関数 f の $\mathfrak{G}$ に関する条件付き期待値 (conditional

expectation) $E(f|\mathfrak{G})$ は，任意の有界な $\mathfrak{G}$ 可測関数 g に対して

$$\int_X E(f|\mathfrak{G})(x)g(x)\mu(dx) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx) \tag{7.6.2}$$

を満たす $\mathfrak{G}$ 可測関数として特徴付けられる．

定理 7.6.1 (Birkhoff–Khinchin). 任意の $f \in L^1(X)$ と殆ど全ての $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = E(f|\mathfrak{G})(x) \tag{7.6.3}$$

となる．

この定理は Birkhoff–Khinchin のエルゴード定理 (Birkhoff–Khinchin ergodic theorem) と呼ばれる．証明は難しくないが，ここでは割愛する．特に，エルゴード的な保測力学系においては，殆ど全ての $x \in X$ に対して時間平均は空間平均に収束するが，これを Birkhoff の個別エルゴード定理 (Birkhoff's individual ergodic theorem) と呼ぶ．

第 8 章
トーリック多様体

$2n$ 次元のシンプレクティック多様体上の Hamilton 系が n 個の Poisson 可換かつ関数的に独立な保存量を持つ時，完全可積分系と呼ぶのであった．Liouville–Arnold の定理により，完全可積分系は Lagrange トーラスファイブレーションとほぼ同じ概念であるが，より強く，$2n$ 次元のコンパクトなシンプレクティック多様体が n 次元のトーラスの効果的な Hamilton 作用を持つ時，これをシンプレクティックトーリック多様体と呼ぶ．シンプレクティックトーリック多様体は適当な条件を満たす凸多面体と一対一に対応し，トーリック多様体の幾何学的な構造を凸多面体の組合せ論的な構造によって目に見える形で理解できる．この意味で，トーリック多様体は凸体の組合せ論が実体化した空間であると言う事ができよう．トーリック多様体はシンプレクティック幾何学において，単に例を提供する以上の重要な役割を果たす．

8.1 シンプレクティックトーリック多様体

シンプレクティック多様体 (X, ω) 上の完全可積分系 $F\colon X \to \mathbb{R}^n$ に対し，F の正則値の逆像を正則ファイバーと呼ぶ．Liouville–Arnold の定理により，F の正則ファイバーは，コンパクトかつ連結であれば Lagrange トーラスになり，しかもその近傍で作用・角変数と呼ばれる良い座標が取れる．角座標を回す事によって F の正則ファイバーにはトーラスが作用し，作用座標はこの作用の運動量写像になっている．作用・角座標はファイバー方向には大域的であるが，底空間方向には局所的であるような Darboux 座標の類似であり，$GL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ によるアファイン変換分の不定性がある．この不定性から，一般に作用・角座標はモノドロミーを持ち，大域的には定義されない．

作用・角座標がモノドロミーを持たず，作用座標を Hamilton 関数とするような Hamilton 流が n 次元実トーラス $T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の X への作用を定めるという条件はとても強いので，この状況には名前が付いている:

定義 8.1.1. コンパクトな $2n$ 次元のシンプレクティック多様体 (X, ω) と，(X, ω) への n 次元トーラス $T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の効果的な Hamilton 作用の組 (X, ω, T, μ) を**シンプレクティックトーリック多様体** (symplectic toric manifold) と呼ぶ．

ここで群 G の集合 X への作用が**効果的** (effective) であるとは，任意の $g \in G$ に対してある $x \in X$ が存在して $g \cdot x \neq x$ となることを指す．効果的であることを忠実 (faithful) とも言う．Lie 群 G が多様体 X に作用する時，

$$Z := \{g \in G \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対して } g \cdot x = x\} \tag{8.1.1}$$

は G の閉部分群になるので，G が可換群であれば，必要であれば G を G/Z に取り替えることにより，常に群作用は効果的であると仮定できる事に注意せよ．

コンパクト性の仮定は本質的ではなく，コンパクトでないシンプレクティックトーリック多様体も自然に定義することができる．複素射影空間に Fubini–Study 形式を与えたものはシンプレクティックトーリック多様体の典型的な例であるが，それと同様に，複素アファイン空間 $\mathbb{C}^n$ に Euclid 計量からくる Kähler 形式を与えたものはコンパクトでないシンプレクティックトーリック多様体の典型的な例になる．また，後述する 3 次元の通常 2 重点のクレパントな特異点解消は，コンパクトでないシンプレクティックトーリック多様体のもう 1 つの典型的な例を与える．

半分次元のトーラスの効果的な Hamilton 作用を持つという条件はとても強いので，運動量写像の像だけでシンプレクティック多様体としての構造がトーラス作用の情報も込めて決まってしまう．これは Delzant の定理と呼ばれ，シンプレクティックトーリック多様体の基本定理である．これを正確に述べるために，少し準備をする．

有限生成自由アーベル群を**格子** (lattice) と呼ぶ．n 次元実トーラス $T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ に対し，1 パラメーター部分群のなす格子 N と指標のなす格子 M を

$$N = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T), \quad M = \operatorname{Hom}(T, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \tag{8.1.2}$$

で定義する．$N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は T の Lie 環 $\mathfrak{t}$ と自然に同型であり，N と M は双対である；

$$M = \operatorname{Hom}(N, \mathbb{Z}), \quad N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z}). \tag{8.1.3}$$

$\mathbb{R}^n$ の中の有限個の点の凸包を**多面体** (polytope) と呼ぶ．

定義 8.1.2. 階数 n の格子 M と，$M_{\mathbb{R}}$ 内の多面体 Δ を考える．

1. 多面体 Δ の頂点 p に対し，p を通る Δ の辺がちょうど n 本ある時，頂点 p は**単純** (simple) と呼ばれる．全ての頂点が単純な時，多面体 Δ は**単純** (simple) と呼ばれる．

2. Δ の辺 e の傾きが有理的である時（すなわち，適当な $p \in M \otimes \mathbb{R}$ と $w \in M$ および $a, b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$e = \{p + tw \mid t \in [a, b]\} \tag{8.1.4}$$

と書ける時）辺 e は**有理的** (rational) であると言う．全ての辺が有理的な時，多面体 Δ は**有理的** (rational) と呼ばれる．

3. 多面体の Δ の単純かつ有理的な多面体 Δ は，次の条件を満たす時**滑らか** (smooth) と呼ばれる: 任意の頂点 p に対して，p を通る n 本の辺 $\{e_i\}_{i=1}^n$ のそれぞれを，適当な $p_i \in M \otimes \mathbb{R}$ と $w_i \in M$ および $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ を用いて

$$e_i = \{p + tw_i \mid t \in [a_i, b_i]\} \tag{8.1.5}$$

と表した時，$\{w_i\}_{i=1}^n$ は M の生成元になっている．

滑らかな多面体を **Delzant 多面体** (Delzant polytope) とも呼ぶ．平行移動の自由度を固定するために，Delzant 多面体を考える時は，常に原点が重心になっていると仮定する．Delzant 多面体という名前の由来は次の定理にある:

定理 8.1.3 (Delzant [33])**.**

1. 任意のシンプレクティックトーリック多様体に対し，トーラス作用の運動量写像の像は Delzant 多面体になる．
2. 任意の Delzant 多面体 Δ に対し，あるシンプレクティックトーリック多様体が存在して，そのトーラス作用の運動量写像の像は Δ に一致する．
3. 2 つのシンプレクティックトーリック多様体がシンプレクティックトーリック多様体として同型であるための必要十分条件は，それらの運動量写像の像が多面体として同型であることである．

ここで，格子 M と M' に対し，$\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ と $\Delta' \subset M'_{\mathbb{R}}$ が多面体として同型であるとは，格子の同型 $\phi\colon M \to M'$ で，ϕ が引き起こす線形写像 $\phi_{\mathbb{R}} := \phi \otimes \mathbb{R}\colon M_{\mathbb{R}} \to M'_{\mathbb{R}}$ が Δ を Δ' に移すようなものが存在することを指す．また，2 つのシンプレクティックトーリック多様体 (X, ω, T, μ) と (X', ω', T', μ') の間の同型写像とは，n 次元実トーラス T と T' の間の Lie 群としての同型 $\psi\colon T \to T'$ と，(X, ω) と (X', ω') の間のシンプレクティック同相 $\varphi\colon (X, \omega) \to (X', \omega')$ で，図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ M_{\mathbb{R}} & \xleftarrow{\psi^*} & M'_{\mathbb{R}} \end{array} \tag{8.1.6}$$

が可換になるようなものを指す．ただし，ψ が誘導する $M'_{\mathbb{R}} \cong (\mathbf{t}')^*$ から $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbf{t}^*$ への同型写像を ψ^* とおいた．Hamilton 作用は運動量写像から一意的に定ま

ることに注意すると，図式 (8.1.6) の可換性は，ψ によって 2 つのトーラス T と T' を同一視した時に，シンプレクティック同相写像 φ がトーラス作用に関して同変である事と同値である．以下では Delzant の定理の証明の方針について，[30] に沿って述べる．

トーリック多様体 (X, ω, T, μ) の任意の点 $x \in X$ に対し，0 以上 n 以下の整数 r が存在して，T の作用の x における安定化部分群は r 次元の部分トーラス $T_x \subset T$ になる．トーラスの座標（すなわち，Lie 群の同型 $T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$）を上手く取って，$T_x$ が $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の部分群

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \mid \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0\} \tag{8.1.7}$$

に対応するようにできる．この時，x の開近傍 U_x で，

$$\left(\mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^\times)^{n-r}, \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^r dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i=r+1}^n \frac{dz_i \wedge d\overline{z}_i}{|z_i|^2}\right)\right) \tag{8.1.8}$$

の T 不変な開集合と T の Hamilton 作用を持つ多様体として同型になるようなものが存在する．但し，T は $\mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^\times)^{n-r}$ に

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \colon (z_i)_{i=1}^n \mapsto \left(e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i} z_i\right)_{i=1}^n \tag{8.1.9}$$

で作用し，この同型で x は $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ に移る．この作用の運動量写像は，

$$\mu(z) = \left(\frac{1}{2}|z_1|^2, \ldots, \frac{1}{2}|z_r|^2, \log|z_{r+1}|, \ldots, \log|z_n|\right) \tag{8.1.10}$$

であり，これがトーラスの Hamilton 作用の局所的な標準形を与える．

上の局所的な標準形から，運動量多面体 Δ の任意の点 m に対し，m の十分小さい近傍 U と，M 格子と $\mathbb{Z}^n$ の適当な同一視，それに適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\Delta \cap U = \{m \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \ldots, r \text{ に対して } x_i \geq \lambda_i\} \tag{8.1.11}$$

となる事が分かる．ここで $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ の自由度は，運動量写像の定義に定数を加える任意性から来る．この表示から，シンプレクティックトーリック多様体の運動量多面体は Delzant 多面体になる事が直ちに従う．

逆に Delzant 多面体 Δ が与えられた時，Δ を運動量多面体として持つシンプレクティックトーリック多様体は次のようにして構成される: まず，Δ の余次元 1 の面の集合を $\Delta^{(1)} = \{F_1, \ldots, F_d\}$ とおき，各々の F_i に対し，その原始的な内向きの法ベクトルを $u_i \in N$ とすると，Δ は適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ によって

$$\Delta = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } i = 1, \ldots, d \text{ に対して } \langle u_i, m\rangle \geq \lambda_i\} \tag{8.1.12}$$

と表示される．この u_i を用いて Abel 群の準同型を

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^d \to N, \quad \varphi(e_i) = u_i \tag{8.1.13}$$

で定義する．但し，$\mathbb{Z}^d$ の i 番目の標準基底を e_i とおいた．φ に $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をテンソルして得られるトーラスの準同型

$$\varphi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\colon \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to T = N_{\mathbb{R}}/N \tag{8.1.14}$$

の核を

$$K := \operatorname{Ker} \varphi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tag{8.1.15}$$

とおく．d 次元の実トーラス $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ は実 $2d$ 次元のシンプレクティックベクトル空間 $(\mathbb{C}^d, \omega_{\mathbb{C}^d})$ への自然な Hamilton 作用を持つ．この作用を $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ の部分群 K に制限することで，K の $(\mathbb{C}^d, \omega_{\mathbb{C}^d})$ への Hamilton 作用が得られる．この作用の運動量写像 μ_K は，$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ の運動量写像 $\mu_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}$ を埋め込み写像 $\iota\colon K \hookrightarrow \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ の微分 $\iota_*\colon \operatorname{Lie}(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d) \to \mathfrak{k}$ による引き戻し $\iota^*\colon (\operatorname{Lie}(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d))^* \to \mathfrak{k}^*$ と合成したもので与えられる；

$$\mu_K = \iota^* \circ \mu_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}. \tag{8.1.16}$$

この時，$\mathbb{C}^d$ の K による $\iota^*(-\lambda)$ におけるシンプレクティック商を

$$X := \mathbb{C}^d /\!\!/_{\iota^*(-\lambda)} K := \mu_K^{-1}(\iota^*(-\lambda))/K \tag{8.1.17}$$

とおく．Lie 群の完全列

$$1 \to K \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \xrightarrow{\varphi \otimes (\mathbb{R}/\mathbb{Z})} N_{\mathbb{R}}/N \to 1 \tag{8.1.18}$$

が誘導する Lie 環の完全列

$$0 \to \mathfrak{k} \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\varphi_*} N_{\mathbb{R}} \to 0 \tag{8.1.19}$$

は扇列 (fan sequence) と呼ばれ，その双対を取って得られる実ベクトル空間の完全列

$$0 \to M_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\iota^*} \mathfrak{k}^* \to 0 \tag{8.1.20}$$

は因子列 (divisor sequence) と呼ばれる．X は $N_{\mathbb{R}}/N$ の効果的な Hamilton 作用を持ち，その運動量多面体は $\mathbb{R}^d$ の第 1 象限

$$\left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \text{任意の } i = 1, \ldots, d \text{ に対し } x_i \geq 0\right\} \tag{8.1.21}$$

と $(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda))$ の共通部分で与えられる．点 $-\lambda = -(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ を原点に取ってアファイン空間 $(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda))$ をベクトル空間 $M_{\mathbb{R}}$ と同一視すると，この共通部分は (8.1.12) で定義される Δ と一致する．

シンプレクティックトーリック多様体が運動量多面体から一意的に決まる事

を示すには，運動量多面体 Δ を共有する任意のシンプレクティックトーリック多様体 X と X' に対して，X と X' の間の同型写像を構成すればよい．このために，まず前述の局所的な標準形を繋ぎ合わせて，X から X' への微分同相写像で，群作用に関して同変で，運動量写像を保つものを構成する．この微分同相によって X と X' を同一視すると，X に 2 つのトーラス不変なシンプレクティック形式 ω と ω' で，対応する運動量写像が写像として等しいものが得られる．この時，任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$\omega_t = (1-t)\omega + t\omega' \tag{8.1.22}$$

は再びトーラス不変なシンプレクティック形式である．トーラス不変なシンプレクティック形式の属するコホモロジー類は運動量多面体から決まる事が容易に分かるので，ω_t のコホモロジー類は t に依存しない．ここで Moser の定理を使えば，結局 X と X' がシンプレクティックトーリック多様体として同型である事が従う．

8.2 代数多様体としてのトーリック多様体

全てのシンプレクティックトーリック多様体は自然に複素射影多様体の構造を持ち，複素代数幾何学の観点からこれらの多様体を調べることもできる．複素代数幾何学においては，トーリック多様体は次のように定義される:

定義 8.2.1. 代数的トーラス $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^\times)^n$ の作用する正規代数多様体 X が稠密な $T_{\mathbb{C}}$ 軌道を持つ時，X とこれに対する $T_{\mathbb{C}}$ 作用の組を**トーリック多様体** (toric variety) と呼ぶ．

ここで多様体が manifold ではなく variety になっている事に注意せよ．トーリック多様体は滑らかとは限らず，一般には特異点を持つ．シンプレクティックトーリック多様体は局所的には (8.1.8) と同型であるが，トーリック多様体の局所理論は遥かに豊かな内容を持つ．

トーリック多様体は運動量多面体と双対的な扇と呼ばれる対象によって記述される．

定義 8.2.2. 半群 $\mathbb{R}^{\geq 0}$ の作用によって不変な $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合を**錐** (cone) と呼ぶ．錐 σ に対し

$$-\sigma := \{-n \in N_{\mathbb{R}} \mid n \in \sigma\} \tag{8.2.1}$$

とおく．錐 σ が凸集合である時，すなわち

$$\text{任意の } n, n' \in \sigma \text{ と } t \in [0,1] \text{ に対して } (1-t)n + tn' \in \sigma \tag{8.2.2}$$

を満たす時，**凸** (convex) と呼ばれる．凸錐 σ が

$$\sigma \cap (-\sigma) = \{0\} \tag{8.2.3}$$

を満たす時，**強凸** (strongly convex) と呼ばれる．有限個の線形不等式で定義された錐を**多面錐** (polyhedral cone) と呼ぶ．錐 σ が $\sigma \cap N$ の凸包と一致する時，すなわち

$$\sigma = \mathrm{Conv}\,(\sigma \cap N) \tag{8.2.4}$$

を満たす時，**有理多面錐** (rational) と呼ばれる．これは，σ が有限個の $m_1, \dots, m_d \in M$ を用いて

$$\sigma = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_i, n \rangle \geq 0,\ i = 1, \dots, d\} \tag{8.2.5}$$

と表される事と同値である．(8.2.5) において不等号の幾つかを等号で置き換えて得られる集合を σ の**面** (face) と呼ぶ．τ が σ の面である時，$\tau \preceq \sigma$ と書く．有理多面錐 σ の面は，σ の境界の部分集合である．0 次元の面を頂点 (vertex)，1 次元の面を辺 (edge)，余次元が 1 の面を切子面 (facet) と呼ぶ．有理強凸多面錐の集合 Σ が

- 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し，σ の任意の面は再び Σ の元である
- 任意の $\sigma, \tau \in \Sigma$ に対し，それらの共通部分 $\sigma \cap \tau$ も再び Σ の元である

という 2 つの条件を満たす時，**扇** (fan) と呼ばれる．

錐 σ に対し，その**双対錐** (dual cone) $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ が

$$\sigma^\vee := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } n \in \sigma \text{ に対して } \langle n, m \rangle \geq 0\} \tag{8.2.6}$$

で定義される．錐 σ が有理多面錐であれば，$\sigma^\vee \cap M$ は有限生成半群になる．対応する半群環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ から得られるアファインスキームを

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \tag{8.2.7}$$

と書く．

格子 M は代数的トーラス $T_{\mathbb{C}}$ の指標群 $\mathrm{Hom}(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times)$ と自然に同一視される事から，半群環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ に対応するアファインスキーム U_σ には自然に $T_{\mathbb{C}}$ が作用する．

有理多面錐 σ が強凸であれば，$\sigma^\vee \cap M$ は M を群として生成するので，U_σ が $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[M] \cong T_{\mathbb{C}}$ を開部分スキームとして含むことが分かる．

双対錐の定義から，任意の $\tau \preceq \sigma$ に対し $\tau^\vee \supset \sigma^\vee$ であり，これが半群環の包含関係

$$\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \supset \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \tag{8.2.8}$$

を引き起こす．これが引き起こすアファインスキームの開埋め込み

$$U_\tau := \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \hookrightarrow U_\sigma := \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \tag{8.2.9}$$

によって $(U_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ を貼り合わせて得られる代数多様体を扇 Σ に付随するトーリック多様体と呼び，X_Σ で表す;

$$X_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma. \tag{8.2.10}$$

アファインスキームの埋め込み (8.2.9) が半群の埋め込み $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ によって引き起こされている事から，アファインスキームの埋め込み (8.2.9) は $T_\mathbb{C}$ 作用に関して同変であり，従って各々の U_σ に対する $T_\mathbb{C}$ の作用は貼り合って X_Σ に対する $T_\mathbb{C}$ の作用を定める．任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し，$\sigma^\vee \subset M$ なので

$$U_\sigma = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \supset T_\mathbb{C} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[M] \tag{8.2.11}$$

であり，埋め込み (8.2.9) を $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[M]$ に制限したものは恒等写像になっている．$T_\mathbb{C}$ は U_σ の稠密な開集合なので，X_Σ は $T_\mathbb{C}$ を稠密な開集合として含む．

格子 M の部分モノイド S は，

- 任意の $x \in M$ と $k \in \mathbb{Z}^{>0}$ に対し，$kx \in S$ であれば $x \in S$

という条件を満たす時，**飽和している** (saturated) と言う．一般の可換モノイドに対しては，M を S の Grothendieck 群

$$S^{\mathrm{group}} = S \times S/\sim \tag{8.2.12}$$

で置き換えればよい．但し，ここでの同値関係は，ある $z \in S$ が存在して $x + y' + z = x' + y + z$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ と定義される．モノイドは，Grothendieck 群への標準的な写像が単射である時に整 (integral) と呼ばれる．整モノイド S の半群環が正規 (normal) であることの必要十分条件は，S が飽和していることである．モノイド $\sigma^\vee \cap M$ は明らかに飽和しているので，任意の扇 Σ に対し，X_Σ は正規多様体である．

運動量多面体の点 $x \in \Delta$ に対し，Δ の x における**接錐** (tangent cone) が

$$T_x\Delta = \{m \in M_\mathbb{R} \mid \text{正数 } t \text{ が存在して } x + tm \in \Delta\} \tag{8.2.13}$$

で定義される．接錐 $T_x\Delta \subset M_\mathbb{R}$ の双対錐を**法錐** (normal cone) と呼び，$N_x\Delta \subset N_\mathbb{R}$ で表す．x と x' が Δ の同じ面の相対内点である時，Δ の x における法錐と x' における法錐は一致する．Δ の法錐の集合 $\bigcup_{x\in\Delta}\{T_x\Delta\}$ を Δ の**法扇** (normal fan) と呼ぶ．シンプレクティックトーリック多様体に対し，その運動量多面体を Δ とおくと，Δ の法扇の定めるトーリック多様体はもとのシンプレクティックトーリック多様体と微分同相になる．運動量多面体の組合せ論的な構造を変えずに切子面を平行移動しても法扇は変わらないので，運動量多面体の方が扇よりも多くの情報を含んでいる．この余分の情報は，シンプレクティック形式の属するコホモロジー類を記述している．一方，射影的でな

いトーリック多様体はシンプレクティックトーリック多様体の構造を持たないので，全てのトーリック多様体を記述するためには扇を用いる必要がある．また，複素数体とは限らない体の上で定義できる事も，シンプレクティックトーリック多様体と比べた時のトーリック多様体の利点である．

8.3 反射的多面体と Fano 多面体

扇の 1 次元錐の原始的生成元の凸包を**扇多面体** (fan polytope) と呼ぶ．凸多面体 $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ は，全ての頂点が M に含まれる時，**凸格子多面体** (convex lattice polytope) と呼ばれる．凸格子多面体 $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$ は，

- 原点が内点に含まれる; $0 \in \operatorname{Int} \Delta$.
- 任意の余次元 1 の面 $F \subset \Delta$ に対し，F の頂点の集合が N の $\mathbb{Z}$ 基底をなす．

という 2 つの条件を満たす時，**滑らかな Fano 多面体** (smooth Fano polytope) と呼ばれる．反正準因子 (anti-canonical divisor) が豊富 (ample) な射影多様体 (projective manifold) は **Fano 多様体** (Fano manifold) と呼ばれる．トーリック多様体が Fano 多様体であるための必要十分条件はその扇多面体が滑らかな Fano 多面体である事である．

多面体 $\Delta \subset M$ の**極双対** (polar dual) は

$$\Delta^\circ = \{n \in N \mid \text{任意の } m \in \Delta \text{ に対し } \langle n, m\rangle \geq -1\} \tag{8.3.1}$$

で定義される．Δ が原点を内点に含んでいれば

$$(\Delta^\circ)^\circ = \Delta \tag{8.3.2}$$

であることが容易に分かる．格子多面体 Δ に対し，極双対 Δ° が再び格子多面体になる時，Δ は**反射的** (reflexive) と言われる．明らかに反射的多面体の極双対は再び反射的になる．また，反射的多面体は原点を唯一の内点に持つ事が容易に分かる．

滑らかな Fano 多面体が 1 次元では 1 つ，2 次元では 5 つしかない事は容易に分かる．3 次元の滑らかな Fano 多面体は Batyrev [16] と渡辺–渡邉 [136] によって独立に分類され，全部で 18 個ある．4 次元の滑らかな Fano 多面体からなる 123 個のリストが Batyrev [17] によって得られたが，実は 1 つ見落としがあって，4 次元の滑らかな Fano 多面体は全部で 124 個ある事が佐藤 [120] によって示された．5 次元の滑らかな Fano 多面体は Kreuzer–Nill [81] によって，また，6 次元と 7 次元の滑らかな Fano 多面体は Øbro [112] によって分類され，それぞれ 866 個，7622 個および 72256 個ある事が知られている．

Hensley [61] は n 次元の格子多面体 Δ が $k \geq 1$ 個の格子点を内点に持つ時，Δ の体積は n と k のみから決まる定数で上から抑えられる事を示した．さらに，Lagarias と Ziegler [84] は，任意の n 次元の格子多面体 Δ は適当な整ア

ファイン変換によって 1 辺の長さが $n \cdot n! \operatorname{vol}(\Delta)$ であるような n 次元格子立方体に含まれることを示した．これらの事実から，原点を唯一の内点に持つ格子多面体の同型類は各次元で有限である事が直ちに従う．1 次元と 2 次元の反射的多面体はそれぞれ 1 個及び 16 個である事が容易に分かる．3 次元と 4 次元の反射的多面体はそれぞれ 4319 個及び 473,800,776 個あることが Kreuzer と Skarke によって示された．これについては [82] やその参考文献を見よ．また，任意の格子多面体は十分高い次元の反射的多面体の面になることが Haase と Melnikov [58] によって知られている．

反射的多面体とその極双対はミラー対称性の研究において重要な役割を果たす．この話題については，例えば [31] やその引用文献を見よ．

8.4 具体例

8.4.1 射影直線

Δ が 1 次元の時，$M = \mathbb{Z}$ とおき，$\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ の定義不等式を

$$\Delta = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m \geq \lambda_1 \text{ かつ } -m \geq \lambda_2\} \tag{8.4.1}$$

とおくと，Abel 群の準同型 (8.1.13) は

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to N \cong \mathbb{Z}, \qquad \varphi(1,0) = 1, \quad \varphi(0,1) = -1 \tag{8.4.2}$$

で与えられ，

$$K := \operatorname{Ker} \varphi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tag{8.4.3}$$

$$= \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \;\middle|\; \alpha_1 = \alpha_2\right\} \tag{8.4.4}$$

$$\cong S^1 = \left\{\alpha \in \mathbb{C}^\times \;\middle|\; |\alpha| = 1\right\} \tag{8.4.5}$$

は $\mathbb{C}^2$ に

$$\alpha\colon (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1, \alpha z_2) \tag{8.4.6}$$

で作用する．この作用は運動量写像

$$\mu_K\colon (z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \tag{8.4.7}$$

を持つ Hamilton 作用であり，対応するシンプレクティック商は

$$\mathbb{C}^2 /\!\!/_\lambda K := \mu_K^{-1}(\lambda)/K \tag{8.4.8}$$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{P}^1 & \lambda > 0, \\ 1\text{ 点} & \lambda = 0, \\ \emptyset & \lambda < 0 \end{cases} \tag{8.4.9}$$

となる．扇列 (8.1.19) は

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi_* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{R} \to 0 \tag{8.4.10}$$

となり，因子列 (8.1.20) は

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\iota^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R} \to 0 \tag{8.4.11}$$

となる．$(-\lambda_1, -\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2 \tag{8.4.12}$$

であり，

$$(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2)) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 \right\}$$

である．写像

$$M_{\mathbb{R}} \to (\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2)), \quad m \mapsto (m - \lambda_1, -m - \lambda_2) \tag{8.4.13}$$

によってこのアファイン空間を $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ と同一視すると，$(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2))$ と第 1 象限 $\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$ との共通部分が $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ に対応する．

Δ の法扇は 2 つの 1 次元錐および 1 つの 0 次元錐からなる;

$$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0\}, \tag{8.4.14}$$

$$\sigma_0 = \{0\}, \tag{8.4.15}$$

$$\sigma_1 = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid n \geq 0\}, \tag{8.4.16}$$

$$\sigma_2 = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid n \leq 0\}. \tag{8.4.17}$$

対応する M の部分モノイドは

$$\sigma_0^\vee \cap M = M, \tag{8.4.18}$$

$$\sigma_1^\vee \cap M = \{m \in M \mid m \geq 0\}, \tag{8.4.19}$$

$$\sigma_2^\vee \cap M = \{m \in M \mid m \leq 0\} \tag{8.4.20}$$

であり，半群環は

$$\mathbb{C}[\sigma_0^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}], \tag{8.4.21}$$

$$\mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t], \tag{8.4.22}$$

$$\mathbb{C}[\sigma_2^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t^{-1}] \tag{8.4.23}$$

で与えられる．σ_1 と σ_2 に対応するアファインスキーム U_{σ_1} と U_{σ_2} はどちらも複素平面 $\mathbb{C}$ と同型であり，それらの自然な座標を $z=t$, $w=t^{-1}$ とおくと，X_Σ は U_{σ_1} と U_{σ_2} を

$$U_{\sigma_0}=U_{\sigma_1}\cap U_{\sigma_2}\cong\mathbb{C}^\times \tag{8.4.24}$$

において変数変換

$$w=z^{-1} \tag{8.4.25}$$

で貼り合わせて得られる．

8.4.2 射影平面

次に $M=\mathbb{Z}^2$ が 2 次元で，Δ が 3 つの不等式

$$m_1\geq\lambda_1, \tag{8.4.26}$$

$$m_2\geq\lambda_2, \tag{8.4.27}$$

$$-m_1-m_2\geq\lambda_3 \tag{8.4.28}$$

で定義される 3 角形の場合を考える．この時，(8.1.13) の Abel 群の準同型 $\varphi\colon\mathbb{Z}^3\to N\cong\mathbb{Z}^2$ は

$$\varphi(1,0,0)=(1,0),\qquad\varphi(0,1,0)=(0,1),\qquad\varphi(0,0,1)=(-1,-1)$$

で与えられ，

$$K=\left\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3\;\middle|\;\alpha_1-\alpha_3=\alpha_2-\alpha_3=0\right\}\cong S^1 \tag{8.4.29}$$

は $\mathbb{C}^3$ に

$$\alpha\colon(z_1,z_2,z_3)\mapsto(\alpha z_1,\alpha z_2,\alpha z_3) \tag{8.4.30}$$

で作用する．この作用は運動量写像

$$\mu_K\colon(z_1,z_2,z_3)\mapsto\frac{1}{2}\left(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right) \tag{8.4.31}$$

を持つ Hamilton 作用であり，対応するシンプレクティック商は

$$\mathbb{C}^2/\!\!/_\lambda K:=\mu_K^{-1}(\lambda)/K \tag{8.4.32}$$

$$\cong\begin{cases}\mathbb{P}^2 & \lambda>0,\\ 1\text{ 点} & \lambda=0,\\ \emptyset & \lambda<0\end{cases} \tag{8.4.33}$$

となる．扇列 (8.1.19) と因子列 (8.1.20) はそれぞれ

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}} \mathbb{R}^2 \to 0 \tag{8.4.34}$$

および

$$0 \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}} \mathbb{R} \to 0 \tag{8.4.35}$$

で与えられる．

$$\begin{aligned}&(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3))\\&\quad = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3\right\}\end{aligned}$$

であり，写像

$$M_{\mathbb{R}} \to (\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)), \tag{8.4.36}$$

$$(m_1, m_2) \mapsto (m_1 - \lambda_1, m_2 - \lambda_2, -m_1 - m_2 - \lambda_3) \tag{8.4.37}$$

によってこのアファイン空間を $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ と同一視すると，$(\iota^*)^{-1}(\iota^*(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3))$ と第 1 象限 $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\right\}$ との共通部分が $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ に対応する．対応する扇は 3 つの 2 次元錐

$$\sigma_1 = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0\}, \tag{8.4.38}$$

$$\sigma_2 = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid -n_1 \geq 0,\ -n_1 + n_2 \geq 0\}, \tag{8.4.39}$$

$$\sigma_3 = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_1 - n_2 \geq 0,\ -n_2 \geq 0\}, \tag{8.4.40}$$

3 つの 1 次元錐

$$\sigma_{12} = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (0, 1), \tag{8.4.41}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_2 \cap \sigma_3 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (-1, -1), \tag{8.4.42}$$

$$\sigma_{31} = \sigma_3 \cap \sigma_1 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (1, 0), \tag{8.4.43}$$

および 1 つの 0 次元錐

$$\begin{aligned}\sigma_{123} &= \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3\\&= \{0\}\end{aligned} \tag{8.4.44}$$

からなる．対応する M の部分モノイドは

$$\sigma_1^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid m_1 \geq 0,\ m_2 \geq 0\}, \tag{8.4.45}$$
$$\sigma_2^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid m_2 \geq 0,\ -m_1 - m_2 \geq 0\}, \tag{8.4.46}$$
$$\sigma_3^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid m_1 \geq 0,\ -m_1 - m_2 \geq 0\}, \tag{8.4.47}$$
$$\sigma_{12}^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid m_2 \geq 0\}, \tag{8.4.48}$$
$$\sigma_{23}^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid -m_1 - m_2 \geq 0\}, \tag{8.4.49}$$
$$\sigma_{31}^\vee \cap M = \{(m_1, m_2) \in M \mid m_1 \geq 0\}, \tag{8.4.50}$$
$$\sigma_{123}^\vee \cap M = M \tag{8.4.51}$$

であり，半群環は

$$\mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1, t_2], \tag{8.4.52}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_2^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1^{-1}, t_1^{-1}t_2], \tag{8.4.53}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_3^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1t_2^{-1}, t_2^{-1}], \tag{8.4.54}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_{12}^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, t_2], \tag{8.4.55}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_{23}^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1^{-1}t_2, t_1t_2^{-1}, t_1^{-1}], \tag{8.4.56}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_{31}^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1, t_2, t_2^{-1}], \tag{8.4.57}$$
$$\mathbb{C}[\sigma_{123}^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-2}] \tag{8.4.58}$$

で与えられる．$i = 1, 2, 3$ に対して，U_{σ_i} の座標を

$$U_{\sigma_1}: \qquad t_1 = \frac{x}{z}, \qquad t_2 = \frac{y}{z}, \tag{8.4.59}$$
$$U_{\sigma_2}: \qquad t_1^{-1} = \frac{z}{x}, \qquad t_1^{-1}t_2 = \frac{y}{x}, \tag{8.4.60}$$
$$U_{\sigma_3}: \qquad t_1t_2^{-1} = \frac{x}{y}, \qquad t_2^{-1} = \frac{z}{y} \tag{8.4.61}$$

とおくと，例えば $U_{\sigma_{12}} = U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}$ 上で

$$\frac{z}{x} = t_1^{-1} = \left(\frac{x}{z}\right)^{-1}, \tag{8.4.62}$$
$$\frac{y}{x} = t_1^{-1}t_2 = \left(\frac{x}{z}\right)^{-1}\frac{y}{z} \tag{8.4.63}$$

等となり，同一視

$$U_{\sigma_1} = \left\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; z \neq 0\right\}, \tag{8.4.64}$$
$$U_{\sigma_2} = \left\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; x \neq 0\right\}, \tag{8.4.65}$$
$$U_{\sigma_3} = \left\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; y \neq 0\right\} \tag{8.4.66}$$

の下で

$$X_\Sigma = U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} \cup U_{\sigma_3} = \mathbb{P}^2 \tag{8.4.67}$$

となる事が分かる．

8.4.3 Atiyah のフロップ

扇の 1 次元錐が

$$\sigma_1 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (0,0,1), \quad \sigma_2 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (1,1,1),$$
$$\sigma_3 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (1,0,1), \quad \sigma_4 = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (0,1,1)$$

で与えられるようなコンパクトでないシンプレクティックトーリック多様体は 2 つあって，**Atiyah のフロップ** (Atiyah flop) と呼ばれる操作で結び付いている．この場合の扇列は

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^3 \to 0 \tag{8.4.68}$$

で与えられる．$K \cong S^1$ の $\mathbb{C}^4$ への Hamilton 作用は

$$S^1 \ni \alpha \colon (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha^{-1} z_3, \alpha^{-1} z_4) \tag{8.4.69}$$

であり，その運動量写像は

$$\mu_K(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2 \right) \tag{8.4.70}$$

である．正数 λ_+ に対し，$\mu_K^{-1}(\lambda_+)$ の任意の点 (z_1, z_2, z_3, z_4) は $(z_1, z_2) \neq (0,0)$ を満たす事が

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2\lambda_+ + |z_3|^2 + |z_4|^2 > 0 \tag{8.4.71}$$

から分かるので，写像

$$X_+ := \mathbb{C}^4 /\!\!/_{\lambda_+} K \to \mathbb{P}^1, \quad [(z_1, z_2, z_3, z_4)] \mapsto [z_1 : z_2] \tag{8.4.72}$$

が定義される．射影直線上の同義直線束 (tautological bundle) を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ と書くと，この写像によって X_+ は $\mathbb{P}^1$ 上の同義直線束 2 つのベクトル束としての直和の全空間 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus_{\mathbb{P}^1} (-1)$ と複素多様体として同型になる．同様に，負の数 λ_- に対して写像

$$X_- := \mathbb{C}^4 /\!\!/_{\lambda_-} K \to \mathbb{P}^1, \quad [(z_1, z_2, z_3, z_4)] \mapsto [z_3 : z_4] \tag{8.4.73}$$

が定義され，この写像によって X_- は $\mathbb{P}^1$ 上の同義直線束 2 つのベクトル束としての直和の全空間 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus_{\mathbb{P}^1} (-1)$ と複素多様体として同型になる．

X_+ と X_- はどちらもトーリック多様体なので，代数的トーラスが稠密な開軌道として含まれているが，トーラスの恒等写像を X_+ と X_- の同型に拡張することはできない．しかし，X_+ と X_- は複素多様体としても，シンプレクティックトーリック多様体としても同型である．

因子列は

$$0 \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \mathbb{R} \to 0 \tag{8.4.74}$$

で与えられ，運動量多面体は

$$m_3 \geq \lambda_1, \tag{8.4.75}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 \geq \lambda_2, \tag{8.4.76}$$

$$m_1 + m_3 \geq \lambda_3, \tag{8.4.77}$$

$$m_2 + m_3 \geq \lambda_4 \tag{8.4.78}$$

で定義される．ただし，

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \tag{8.4.79}$$

である．

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, \lambda, 0, 0) \tag{8.4.80}$$

とおくと，

$$m_3 \geq 0,\ m_1 + m_3 \geq 0,\ m_2 + m_3 \geq 0 \tag{8.4.81}$$

で定義される部分集合は $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ および $(-1,-1,1)$ で張られる 3 次元の多面錐であり，これを

$$m_1 + m_2 + m_3 \geq \lambda \tag{8.4.82}$$

で切ったものが X_λ の運動量多面体である．これは $\lambda > 0$ の時に $(\lambda, 0, 0)$ 及び $(0, \lambda, 0)$ を頂点に持ち，$\lambda < 0$ の時に $(0,0,0)$ 及び $(\lambda, \lambda, -\lambda)$ を頂点に持つ．

$\lambda = 0$ の時，$\mu_K^{-1}(0)$ は原点 $0 \in \mathbb{C}^4$ を含んでいる．これは μ_K の臨界値であり，この点において K の作用は自由ではない．この事から，$X_0 = \mu_K^{-1}(0)/K$ は $[0]$ に特異点を持つ．このトーリック多様体に対応する扇 Σ は唯一つの 3 次元錐

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \tag{8.4.83}$$

を持つ．$\sigma^\vee \cap M$ は

$$p_1 = (1,0,0), \quad p_2 = (0,1,0), \quad p_3 = (-1,0,1), \quad p_4 = (0,-1,1)$$

で生成されており，関係式

$$p_1 + p_3 = p_2 + p_4 \tag{8.4.84}$$

を持つ．従って，半群環は

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \cong \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]/(z_1 z_3 - z_2 z_4) \tag{8.4.85}$$

で与えられる．扇 Σ が唯一つの 3 次元錐 σ を持つので，対応するトーリック多様体は

$$X_\Sigma = U_\sigma \tag{8.4.86}$$

となる．(8.4.85) から

$$U_\sigma \cong \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]/(z_1 z_3 - z_2 z_4) \tag{8.4.87}$$

$$\cong \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; z_1 z_3 - z_2 z_4 = 0\right\} \tag{8.4.88}$$

である．これは $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, 0)$ に通常 2 重点 (ordinary double point) と呼ばれる特異点を持つ．変数変換

$$z_1 = w_1 + \sqrt{-1} w_2, \qquad z_2 = -(w_3 - \sqrt{-1} w_4), \tag{8.4.89}$$

$$z_3 = w_1 - \sqrt{-1} w_2, \qquad z_4 = w_3 - \sqrt{-1} w_4, \tag{8.4.90}$$

によって，この特異点は Morse 型（あるいは A_1 型）の特異点であることが分かる；

$$\left\{(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0\right\}. \tag{8.4.91}$$

X_+ および X_- はそれぞれ X_0 のイデアル (z_1, z_2) および (z_3, z_4) に沿った爆発になっている．逆に言うと，X_+ や X_- を $\mathbb{P}^1$ 上の同義直線束 2 つの直和と考えて，零切断の像を潰すと X_0 が得られる．

第 9 章
2次元のゲージ理論

トーリック多様体が人工的なシンプレクティック多様体の代表例だとすると，天然のシンプレクティック多様体の代表例は Riemann 面上の安定ベクトル束のモジュライ空間だろう．これは Narasimhan–Seshadri の定理によって，定中心曲率接続のモジュライ空間と自然に同一視され，代数幾何学，シンプレクティック幾何学，ゲージ理論，低次元トポロジーなどが交錯する興味深い分野をなす．

9.1 2次元の楽園

我々の住んでいる空間は 3 次元であり，時空は 4 次元である．これは 3 次元や 4 次元の幾何を研究する大きな動機を与えるが，それではなぜ 2 次元の幾何を研究するのであろうか．

第 1 の動機は，2 次元の模型が 3 次元や 4 次元の模型の玩具を提供することである．2 次元で予行演習をすることは，より難しい 3 次元や 4 次元の模型を調べるための準備になる．

第 2 の動機は，近似的に 2 次元と見做せるような 3 次元や 4 次元の系が存在することである．細い紐状の系の動力学や，薄膜上の定常系，あるいは空間的に拡がってはいるが 1 つの方向には一様である定常系や，2 方向に一様である系の動力学などがこれに該当する．

第 3 の動機は，模型の数理的な構造が美しいのでそれを調べるのであって，実験で直接検証できるかどうかは問題ではない，というものである．実際，2 次元でしか起きない奇跡が沢山あって，純粋に審美的な観点のみからも，これらの模型を調べることは大きな喜びをもたらす．その典型的な例が 2 次元の量子重力理論であって，KdV 方程式や KP 方程式に代表されるような可積分階層 (integrable hierarchy) と驚くべき関係を持つ．

2 次元の重力理論が 4 次元の重力理論の玩具であるように，2 次元のゲージ

理論は 4 次元のゲージ理論の玩具である．一般にゲージ理論より重力理論のほうが遥かに難しい．これは 2 次元においても正しいが，重力理論の方がゲージ理論よりも歴史があって，昔から研究されてきたので，まずは 2 次元の古典純粋重力理論について少し思い出そう．ここで純粋 (pure) とは，重力以外の物質場やゲージ場などを考えないことを指す．

純粋重力理論の運動方程式は真空中の Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{9.1.1}$$

で与えられる．ここで $R_{\mu\nu}$ は Ricci 曲率，$g_{\mu\nu}$ は計量テンソル，Λ は宇宙定数 (cosmological constant) である．必要であれば Riemann 計量を定数倍することによって，Λ は 0, 1, -1 のいずれかに規格化することができる．Einstein 方程式を満たす Riemann 多様体を **Einstein 多様体** (Einstein manifold) と呼ぶ．2 次元では Ricci 曲率はスカラー曲率 R を用いて

$$R_{\mu\nu} = R g_{\mu\nu} \tag{9.1.2}$$

と書けるので，(9.1.1) は

$$R = \Lambda \tag{9.1.3}$$

となる．さらに，曲率テンソルはスカラー曲率を用いて

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \tag{9.1.4}$$

と書けるので，Einstein 多様体であることは**定曲率空間** (space form) であることと同値である．Killing–Hopf の定理により，単連結な完備定曲率空間は，球面，Euclid 空間または双曲空間に限られ，一般の完備定曲率空間はこのいずれかを普遍被覆に持つ．

2 次元では，複素幾何，代数幾何，微分幾何および群論の距離が他の次元に比べてずっと近い．実際，次の 4 つの概念は 2 次元では一致する:

- コンパクトな複素多様体
- 代数関数体
- Riemann 多様体の共形同値類
- 定曲率空間の自己同型群の離散部分群で，その作用が自由かつココンパクトなもの．

ただし，ここでは多様体は常に向きを込めて考えている．他の次元と比べた時の 2 次元の顕著な特長の 1 つは，共形構造と複素構造が一致することである．これは 2 次元では計量が与えられればそれに関する $\pi/2$ 回転として概複素構造が定まることと，2 次元では全ての概複素構造が積分可能になることから来ている．従って，共形写像は正則写像と一致し，その自由度は無限次元になる．このことが，共形不変性を 2 次元で特に強力なものにしている．

2次元では，任意の共形構造に対してそれと整合的な定曲率Riemann計量が唯一つ存在する．実際，任意のRiemann面に対し，その普遍被覆を考えることで単連結なRiemann面を得るが，Poincaré–Koebeの**一意化定理** (uniformization theorem) によって，単連結なRiemann面は

- Riemann球面 $\mathbb{P}^1$
- 複素平面 $\mathbb{C}$
- 上半平面 $\mathbb{H}$

のどれかに双正則同値になる．これらの空間には自然に定曲率Riemann計量が入るので，この双正則同値写像で定曲率Riemann計量を引き戻すことにより，与えられた共形構造と整合的な定曲率Riemann計量が入る．

重力理論と同様に，ゲージ理論においても2次元では複素幾何，代数幾何，微分幾何および群論の間に密接な関係がある．特に，次の4つの概念はコンパクトRiemann面上ではほぼ一致する:

- 正則ベクトル束
- 代数的ベクトル束
- 定中心曲率接続
- 基本群（の中心拡大）のユニタリ表現

ここで「ほぼ」と言ったのは，安定性の問題を無視しているからである．より正確な主張はNarasimhan–Seshadriによる定理9.10.1で与えられ，この章の主定理となる．

正則ベクトル束は複素幾何的な概念であり，代数的ベクトル束は代数幾何的な概念である．これらの2つの概念の違いは，ベクトル束を貼り合わせによって構成する時に，変換関数として複素解析的な意味での正則関数 (holomorphic function) を用いるか，代数幾何的な意味での正則関数 (regular function) を用いるかにある．前者は局所的に収束冪級数で定義される関数を指し，後者は局所的に多項式で定義される関数を指すので，複素解析的な意味での正則関数の方が代数幾何的な意味での正則関数よりもずっと広い概念である．その結果として，任意の代数的ベクトル束は自動的に正則ベクトル束でもあるが，一般には正則ベクトル束は代数的とは限らない．しかし，所謂GAGA原理によって，射影多様体の上では，正則ベクトル束と代数的ベクトル束は同値な概念になる．ここで，GAGAという名称はSerreの論文 [122] に由来する．

定中心曲率接続は微分幾何的な概念であり，変換関数ではなく接続の言葉で定義される．理論物理学では接続はゲージ場 (gauge field)，その曲率は場の強さ (field strength) と呼ばれる．また，接続に対してその曲率の L^2 ノルムの2乗を返す関数はYang–Mills汎関数と呼ばれる．このYang–Mills汎関数の停留点を記述する方程式がYang–Mills方程式であり，接続に対する2階の偏微分方程式になる．このYang–Mills方程式の解のモジュライ空間（ゲージ同値類のなす空間）の研究が，ゲージ理論の中心的な課題である．2次元ではEinstein

方程式が定曲率方程式と同値になったように，Yang–Mills 方程式も定曲率方程式

$$*F = -2\pi\sqrt{-1}\Lambda \tag{9.1.5}$$

と同値になる．ここで $*$ は Hodge の星状作用素であり，Λ はユニタリ群の Lie 環の元である．2 次元で Yang–Mills 接続と定曲率接続が一致することや，定曲率接続と基本群の中心拡大のユニタリ表現が対応する事は容易に分かる．これらの事実の証明は例えば Atiyah–Bott [11] を見よ．これは 2 次元のゲージ理論に関する古典的文献であり，曲率を運動量写像として理解すること，モジュライ空間を無限次元多様体の無限次元 Lie 群によるシンプレクティック商と見做すこと，運動量写像に Morse 理論を適用することなど，その後の標準になったアイデアの多くがそこで導入された．この論文は大部であるが，極めてよく書けていて，まるで教科書のようである．この論文の内容を紹介しようとしても，劣化版の複製にしかならないので，それはここでは試みない．

正則ベクトル束と基本群のユニタリ表現の間の関係は，一意化のゲージ理論における類似であり，Narasimhan–Seshadri [108] によって Atiyah–Bott 以前から知られていたが，Atiyah–Bott はこの Narasimhan–Seshadri の定理を無限次元のシンプレクティック商として解釈し直した．この新しい解釈に基づいた Narasimhan–Seshadri の定理の新しい証明を与えよという問題を，当時大学院生だった Donaldson は Hitchin から与えられた．この章の目標は，その結果として得られた Donaldson による Narasimhan–Seshadri の定理の微分幾何的な別証 ([35]) を解説する事である．

9.2 ベクトル束の接続

E を多様体 X 上のベクトル束とする．線形写像

$$d_A \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(E) \tag{9.2.1}$$

で，任意の $f \in C^\infty(X)$ と $s \in \Gamma(E)$ に対し Leibniz 則

$$d_A(fs) = f d_A(s) + s \otimes df \tag{9.2.2}$$

を満たすものを E の**接続** (connection) と呼ぶのであった．E の接続のなす空間を $\mathscr{A}(E)$ で表す．任意の $A, A' \in \mathscr{A}(E)$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し $(1-t)d_A + td_{A'}$ が再び E の接続になること，および $d_A - d_{A'}$ が $\Omega^1(\operatorname{End} E)$ の元を定めることから，$\mathscr{A}(E)$ は $\Omega^1(\operatorname{End} E)$ をモデルとするアファイン空間である事が分かる．接続 $d_A \in \mathscr{A}(E)$ は Leibniz 則

$$d_A(s \otimes \omega) = d_A(s) \wedge \omega + (-1)^{\deg s} s \otimes d\omega \tag{9.2.3}$$

によって自然に写像

$$d_A\colon \Omega^\bullet(E) \to \Omega^{\bullet+1}(E) \tag{9.2.4}$$

を引き起こす．但し，ここで $s \in \Omega^p(E)$ に対し $\deg s = p$ とおいた．

$$d_A^2(fs) = d_A(s \otimes df + fd_A(s)) \tag{9.2.5}$$

$$= d_A(s) \wedge df + df \wedge d_A(s) + fd_A^2(s) \tag{9.2.6}$$

$$= fd_A^2(s) \tag{9.2.7}$$

なので，合成

$$d_A^2 := d_A \circ d_A\colon \Omega^\bullet(E) \to \Omega^{\bullet+2}(E) \tag{9.2.8}$$

は微分を含まない．従って，ある $\mathrm{End}\, E$ 値 2 次微分形式

$$F_A \in \Omega^2(\mathrm{End}\, E) \tag{9.2.9}$$

が存在して，d_A^2 は F_A による掛け算作用素になる;

$$d_A^2(s) = F_A \wedge s. \tag{9.2.10}$$

この F_A を d_A の**曲率** (curvature) と呼ぶのであった．局所枠を用いて

$$d_A = d + A \tag{9.2.11}$$

と書くと，

$$F_A(s) = (d + A) \wedge (d + A)s \tag{9.2.12}$$

$$= d^2 s + d(As) + A \wedge ds + A \wedge As \tag{9.2.13}$$

$$= 0 + ((dA) \wedge s - A \wedge ds) + A \wedge ds + A \wedge As \tag{9.2.14}$$

$$= (dA + A \wedge A)s \tag{9.2.15}$$

より

$$F_A = dA + A \wedge A \tag{9.2.16}$$

である．$A \in \mathscr{A}(E)$ と $a \in \Omega^1(\mathrm{End}\, E)$ が与えられた時，任意の $s \in \Gamma(E)$ に対し

$$F_{A+a}(s) = (d_A + a)^2 s \tag{9.2.17}$$

$$= d_A^2 s + d_A(as) + ad_A s + a \wedge as \tag{9.2.18}$$

$$= F_A s + (d_A a)s - a \wedge d_A s + a \wedge d_A s + a \wedge as \tag{9.2.19}$$

$$= (F_A + d_A a + a \wedge a)s \tag{9.2.20}$$

なので

$$F_{A+a} = F_A + d_A a + a \wedge a \tag{9.2.21}$$

となる.

9.3 Yang–Mills 接続

Riemann 多様体 X 上の主 $U(r)$ 束に対し, **Yang–Mills 汎関数** (Yang–Mills functional) は

$$\mathscr{YM}\colon \mathscr{A}(P) \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \|F_A\|_{L^2}^2 = -\int_X \operatorname{tr}(F_A \wedge *F_A) \tag{9.3.1}$$

で定義される. Yang–Mills 汎関数の停留点を **Yang–Mills 接続** (Yang–Mills connection) と呼ぶ.

定理 9.3.1. $A \in \mathscr{A}(P)$ が Yang–Mills 接続であるための必要十分条件は

$$d_A^* F_A = 0 \tag{9.3.2}$$

である.

証明. $A \mapsto A + \delta A$ に対し $F_{A+\delta A} = F_A + d_A(\delta A)$ から

$$\begin{aligned}
&\delta \int_X \operatorname{tr}(F_A \wedge *F_A) && (9.3.3)\\
&= \int_X \operatorname{tr}((\delta F_A) \wedge *F_A) + \int_X \operatorname{tr}(F_A \wedge *(\delta F_A)) && (9.3.4)\\
&= \int_X \operatorname{tr}(d_A(\delta A) \wedge *F_A) + \int_X \operatorname{tr}(F_A \wedge *(d_A \delta A)) && (9.3.5)\\
&= 2\int_X \operatorname{tr}(d_A(\delta A) \wedge *F_A) && (9.3.6)\\
&= -2\int_X \operatorname{tr}(\delta A \wedge d_A(*F_A)) && (9.3.7)
\end{aligned}$$

なので, 後は $d_A^* = *d_A*$ に注意すれば (9.3.2) を得る. □

9.4 2次元多様体上の位相的ベクトル束

X を 2 次元多様体, E を X 上の複素ベクトル束とする. E の第 1 Chern 類を X 上で積分した値を E の**次数** (degree) と呼ぶ. Chern–Weil 理論により, E が接続 A を持つ時, 第 1 Chern 類の de Rham コホモロジー群における代表元として A の曲率の跡を取ることができる;

$$c_1(E) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \operatorname{tr} F_A\right] \in H^2(X;\mathbb{Z}). \tag{9.4.1}$$

2 次元多様体上の複素ベクトル束の位相同型類は次のように分類される:

命題 9.4.1. 2 次元多様体上の複素ベクトル束の位相同型類は階数と次数のみで決まる．

証明. 位相空間 X 上の階数 r の複素ベクトル束の位相同型類は，$U(r)$ の分類空間 (classifying space) を $\mathrm{BU}(r)$ とおいた時，X から $\mathrm{BU}(r)$ への写像のホモトピー類で分類される．胞体近似定理 (cellular approximation theorem) により，CW 複体の間の連続写像は胞体写像（つまり，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して X の i 骨格 (i-skeleton) を Y の i 骨格に移すような連続写像）とホモトピックである．分類空間のモデルとして

$$\mathrm{BU}(r) = \varinjlim \left(\mathrm{Gr}(r,r) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(r,r+1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(r,r+2) \hookrightarrow \cdots \right)$$

を取ると，その 2 骨格は $\mathbb{P}^1 \subset \mathrm{Gr}(r,r+1) \subset \mathrm{BU}(r)$ である．2 次元多様体から $\mathbb{P}^1$ への写像のホモトピー類は次数のみで決まる事から，命題 9.4.1 が従う．

また，次のように障害理論的な考察を直接行うことによっても証明できる: X の 0 骨格 $X^{(0)}$ 上で E の自明化を取ると，これは明らかに X の 1 骨格 $X^{(1)}$ 上の自明化に拡張できる．これを X の 2 骨格 $X^{(2)}$ 上の自明化に拡張できるための障害が E の第 1 Chern 類である．2 つの複素ベクトル束 E_1 および E_2 が与えられた時，それらを $X^{(1)}$ 上で自明化することにより，$X^{(1)}$ 上の同型写像 $E_1|_{X^{(1)}} \xrightarrow{\sim} E_2|_{X^{(1)}}$ を作ることができる．この同型を $X^{(2)}$ 上の同型に拡張することができるための必要十分条件は，E_1 と E_2 の第 1 Chern 類が等しいことである．後は X が 2 次元の時 $X^{(2)} = X$ となることに注意することによって命題 9.4.1 を得る． □

9.5 運動量写像としての曲率

X を 2 次元多様体とし，E を X 上の複素ベクトル束とする．E の Hermite 計量 h を一つ選んで固定する．E の Hermite 計量を選ぶことは，E に同伴する主 $GL_r(\mathbb{C})$ 束を主 $U(r)$ 束に簡約する事と同値である．Cartan 分解もしくは岩澤分解から，$U(r)$ と $GL_r(\mathbb{C})$ はホモトピー同値であるので，この簡約は必ず存在する．また，Riemann 計量の場合と同様に，1 の分解を使って具体的に Hermite 計量を作ることもできる．$G = U(r)$ とおくと，その複素化 $G_{\mathbb{C}}$ は $GL(r,\mathbb{C})$ で与えられる．

E の接続 A が任意の $s,t \in \Gamma(E)$ に対し

$$dh(s,t) = h(d_A s,t) + h(s,d_A t) \tag{9.5.1}$$

を満たす時，A は**ユニタリ接続** (unitary connection) と呼ばれる．(E,h) のユニタリ接続全体のなす空間を $\mathscr{A}(E,h)$ とおく．(E,h) に付随する主 G 束を P とおくと，$\mathscr{A} = \mathscr{A}(E,h)$ は P の接続の空間 $\mathscr{A}(P)$ と自然に同一視され，

$\Omega^1(P \times_G \mathfrak{g})$ をモデルとするアファイン空間になる．

(E,h) の Hermite ベクトル束としての自己同型群

$$\mathscr{G}(E,h) := \mathrm{Aut}(E,h) \tag{9.5.2}$$

を**ゲージ変換群** (gauge transformation group) と呼ぶ．ゲージ変換群の Lie 環は $\mathrm{Lie}\mathscr{G} = \Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ となる．内積

$$\Gamma(P \times_G \mathfrak{g}) \times \Gamma(P \times_G \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \int_X \mathrm{tr}(fg) d\,\mathrm{vol}_X \tag{9.5.3}$$

によって $(\mathrm{Lie}\mathscr{G})^*$ は $\Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ と同一視される．

接続の空間 $\mathscr{A}$ の上の 2 次微分形式 ω を，$A \in \mathscr{A}$ と $\alpha, \beta \in T_A\mathscr{A} \cong \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g})$ に対し

$$\omega_A(\alpha,\beta) = \int_X \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta) \tag{9.5.4}$$

で定義すると，$\mathfrak{g}$ の内積 $\mathrm{tr}\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ と X 上の積分 $\int_X\colon \Omega^1(X) \ni \eta, \tau \mapsto \int_X \eta \wedge \tau \in \mathbb{R}$ の非退化性から，ω は非退化になる．しかも，(9.5.4) が A に関して定数なので，無限次元アファイン空間 $\mathscr{A}$ 上の微分形式として $d\omega = 0$ が成立する．

ゲージ変換 $g \in \mathscr{G}$ の $\mathscr{A}$ への作用は，$A \in \mathscr{A}$ と $\alpha \in \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g})$ に対し

$$d_{A+\alpha} = d_A + \alpha \mapsto d_{g(A+\alpha)} = g \circ (d_A + \alpha) \circ g^{-1} \tag{9.5.5}$$

$$= g \circ d_A \circ g^{-1} + g\alpha g^{-1} \tag{9.5.6}$$

$$= d_{g(A)} + g\alpha g^{-1} \tag{9.5.7}$$

で与えられるので，接空間への $\mathscr{G}$ の作用 $g_*\colon T_A\mathscr{A} \to T_{g(A)}\mathscr{A}$ は

$$g_*\alpha = g\alpha g^{-1} \tag{9.5.8}$$

であり，跡の巡回不変性から明らかに ω を保つ;

$$\omega_{g(A)}(g_*\alpha, g_*\beta) = \int_X \mathrm{tr}(g\alpha g^{-1} \wedge g\beta g^{-1}) \tag{9.5.9}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta) \tag{9.5.10}$$

$$= \omega_A(\alpha,\beta). \tag{9.5.11}$$

また，$h \in \Gamma(P \times_G \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Lie}(\mathscr{G})$ に対し，$e^{ht} \in \mathscr{G}$ による $A \in \mathscr{A}$ のゲージ変換の t に関して 1 次の項は

$$(1+th)(d_A) = (1+th) \circ d_A \circ (1+th)^{-1} \tag{9.5.12}$$

$$= (1+th) \circ d_A \circ (1-th) \tag{9.5.13}$$

$$= (1+th)(1-th)d_A + (1+th) \circ d_A(-th) \tag{9.5.14}$$

$$= d_A - td_Ah \tag{9.5.15}$$

となるので，h が生成する $\mathscr{A}$ 上のベクトル場 $\underline{h}$ の $A \in \mathscr{A}$ での値 $\underline{h}_A$ は

$$\underline{h}_A = -d_A h \in \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g}) \tag{9.5.16}$$

で与えられる．従って，任意の $\alpha \in T_A\mathscr{A}$ に対し，

$$\omega_A(\underline{h}_A, \alpha) = -\int_X \mathrm{tr}\left((d_A h) \wedge \alpha\right) \tag{9.5.17}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}(h d_A \alpha) \tag{9.5.18}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}(h F_A) \tag{9.5.19}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}(h * F_A) d\,\mathrm{vol}_X \tag{9.5.20}$$

となる．ここで，$s \in \Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ と $\eta \in \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g})$ に対し

$$0 = \int_{\partial X} \mathrm{tr}(s\alpha) \tag{9.5.21}$$

$$= \int_X d\,\mathrm{tr}(s\alpha) \tag{9.5.22}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}(d_A s \wedge \alpha) + \int_X \mathrm{tr}(s d_A \alpha) \tag{9.5.23}$$

となることを用いた．従って，写像

$$*F\colon \mathscr{A} \to (\mathrm{Lie}\,\mathscr{G})^*, \quad A \mapsto *F_A \tag{9.5.24}$$

は $\mathscr{G}$ の $\mathscr{A}$ への作用の運動量写像である．ユニタリ群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の中心は実のスカラー行列からなる．実数 μ に対し，$\mu \cdot \mathrm{id}_E \in \Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ を元とする 1 点集合は $\mathrm{Lie}(\mathscr{G})^*$ の余随伴軌道である．微分方程式

$$*F_A = -2\pi\sqrt{-1}\mu\,\mathrm{id}_E \tag{9.5.25}$$

を満たす接続を**定中心曲率接続** (constant central curvature connection) と呼び，定中心曲率接続のなす空間をゲージ変換群 $\mathscr{G}$ の作用で割った商空間

$$\mathcal{M}(r,d) := \left\{ A \in \mathscr{A} \;\middle|\; *F_A = -2\pi\sqrt{-1}\mu\,\mathrm{id}_E \right\} / \mathscr{G} \tag{9.5.26}$$

を定中心曲率接続のモジュライ空間と呼ぶ．ただし，ここで

$$d = r\mu \tag{9.5.27}$$

とおいた．これは無限次元シンプレクティックアファイン空間 $\mathscr{A}$ の無限次元 Lie 群 $\mathscr{G}$ によるシンプレクティック商である．$\mathcal{M}(r,d)$ は一般には特異点を持つが，有限次元のシンプレクティック商の場合と同様にして，その非特異部分には自然にシンプレクティック構造が入る．ゲージ変換

$$\mathscr{G} \to \mathscr{A}, \qquad g \mapsto g(A) \tag{9.5.28}$$

の微分 $\mathrm{Lie}(\mathscr{G}) \to T_A\mathscr{A}$ は (9.5.16) から

$$d_A\colon \Gamma(P \times_G \mathfrak{g}) \to \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g}), \quad h \mapsto -d_A h \tag{9.5.29}$$

で与えられる事と，接続に対して曲率を対応させる写像

$$F\colon \mathscr{A} \to \Omega^2(P \times_G \mathfrak{g}), \quad A \mapsto F_A \tag{9.5.30}$$

の微分は (9.2.21) から

$$d_A\colon \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g}) \to \Omega^2(P \times_G \mathfrak{g}), \quad \alpha \mapsto d_A\alpha \tag{9.5.31}$$

で与えられる事から，$\mathcal{M}(r,d)$ の非特異点 $[A]$ における接空間は，複体

$$0 \to \Gamma(P \times_G \mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(P \times_G \mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(P \times_G \mathfrak{g}) \to 0 \tag{9.5.32}$$

の 1 次のコホモロジー $H^1(P \times_G \mathfrak{g})$ で与えられる．(9.5.4) がシンプレクティック商 $\mathcal{M}_\Lambda$ に誘導するシンプレクティック形式は，コホモロジーのカップ積

$$\cup\colon H^1(P \times_G \mathfrak{g}) \times H^1(P \times_G \mathfrak{g}) \to H^2(P \times_G (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})), \tag{9.5.33}$$

係数の跡

$$\mathrm{tr}\colon H^2(P \times_G (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})) \to H^2(X;\mathbb{R}), \tag{9.5.34}$$

および Poincaré 双対性

$$\int_X\colon H^2(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \tag{9.5.35}$$

の合成で与えられる．$\mathcal{M}(r,d)$ の非特異部分上の 2 次微分形式 ω を定義するだけなら無限次元空間を持ち出す必要は無いが，ω が閉であることを有限次元の枠内で示すのは必ずしも易しくない．

9.6 正則ベクトル束

X を複素多様体とし，E を X 上の複素ベクトル束とする．E の変換関数が正則関数である時，E を**正則ベクトル束** (holomorphic vector bundle) と呼ぶ．言い換えると，正則ベクトル束とは，積分可能な複素構造を持つ複素ベクトル束を指す．複素多様体の定義では複素構造の積分可能性を仮定するが，複素ベクトル束の定義では複素構造の積分可能性は仮定しないことに注意せよ．次の定理は Newlander–Nirenberg の定理のベクトル束に対する類似である:

定理 9.6.1. 複素多様体 X 上の複素ベクトル束 E に積分可能な複素構造を入れることは，微分作用素

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}}\colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E) \tag{9.6.1}$$

で，

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}}^2 \colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,2}(E) \tag{9.6.2}$$

が零になるものを与えることと同値である．

証明．X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が与えられた時，X の各点に対し，その点の近傍 U と U 上の局所正則枠 $(e_i)_{i=1}^r$ を取って，微分作用素

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}} \colon \Gamma\left(E|_U\right) \to \Omega^{0,1}\left(E|_U\right) \tag{9.6.3}$$

を，$s_1, \ldots, s_r \in C^\infty(U)$ を用いて

$$s = \sum_{i=1}^r e_i s_i \tag{9.6.4}$$

と書ける U 上の E の切断に対して

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}} s := \sum_{i=1}^r e_i \overline{\partial} s_i \tag{9.6.5}$$

で定義する．こうして近傍ごとに定義された $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$ が貼り合って大域的な微分作用素を示すためには，この定義が局所正則枠の取り方に依らないことを示せばよい．そこで，U 上の別の局所正則枠 $(e'_j)_{j=1}^r$ を取ると，$(e_i)_{i=1}^r$ と $(e'_j)_{i=1}^r$ がともに局所正則枠であるので，正則な変換関数

$$g = (g_{ij})_{i,j=1}^r \in \Gamma(\operatorname{End} E), \quad \overline{\partial} g = 0 \tag{9.6.6}$$

が存在して

$$e_j = \sum_{i=1}^r e'_i g_{ij}, \quad j = 1, \ldots, r \tag{9.6.7}$$

となる．新しい枠に関する s の表示を

$$s = \sum_{j=1}^r e'_j s'_j \tag{9.6.8}$$

とおくと，成分の間の関係は

$$\sum_{i=1}^r e'_i s'_i = \sum_{j=1}^r e_j s_j = \sum_{i,j=1}^r e'_i g_{ij} s_j \tag{9.6.9}$$

より

$$s'_i = \sum_{j=1}^r g_{ij} s_j \tag{9.6.10}$$

となる．この時，

$$\sum_{i=1}^{r} e_i' \overline{\partial} s_i' = \sum_{i,j=1}^{r} e_i' \overline{\partial}(g_{ij} s_j) \tag{9.6.11}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{r} e_i' (\overline{\partial} g_{ij}) s_j + \sum_{i,j=1}^{r} e_i' g_{ij} (\overline{\partial} s_j) \tag{9.6.12}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{r} e_i' g_{ij} \overline{\partial} s_j \tag{9.6.13}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} e_j \overline{\partial} s_j \tag{9.6.14}$$

となるので，$\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$ が局所正則枠の取り方に依らずに定義されることが分かる．こうして定義された $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$ が $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}^2 = 0$ を満たすことは，X の複素構造の積分可能性

$$\overline{\partial}^2 = 0 \tag{9.6.15}$$

から直ちに従う．

逆に，$\overline{\partial}_{\mathscr{E}}^2 = 0$ となるような微分作用素

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}} \colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E) \tag{9.6.16}$$

が E に積分可能な複素構造を定めることの証明はここでは省略する．例えば [37, Theorem 2.1.53] を見よ． □

複素多様体 X 上の複素ベクトル束 E の接続

$$d_A \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(E) \tag{9.6.17}$$

が与えられた時，X の複素構造から定まる分解

$$\Omega^1(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X) \tag{9.6.18}$$

によって，d_A を

$$\partial_A \colon \Gamma(E) \to \Omega^{1,0}(E) \tag{9.6.19}$$

と

$$\overline{\partial}_A \colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E) \tag{9.6.20}$$

の和

$$d_A = \partial_A + \overline{\partial}_A \tag{9.6.21}$$

に分解する事ができる．

複素多様体 X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ 上の接続 A が $\overline{\partial}_A = \overline{\partial}_{\mathscr{E}}$ を満たす時，A は $\mathscr{E}$ **の正則構造と整合的** (compatible with the holomorphic structure of $\mathscr{E}$) と呼ばれる．

9.7 標準接続

次の命題 9.7.1 で与えられる接続を標準接続 (canonical connection) と呼ぶ.

命題 9.7.1. 複素多様体 X 上の正則 Hermite ベクトル束 $(\mathscr{E}, h)$ に対し，$\mathscr{E}$ の正則構造と整合的なユニタリ接続が唯一つ存在する.

命題 9.7.1 の証明には大きく分けて局所ユニタリ枠を用いるものと局所正則枠を用いるものの 2 通りあり，それぞれ Hermite 構造および正則構造に着目している.

命題 9.7.1 の局所ユニタリ枠を用いた証明. まず一意性を示す. $\mathscr{E}$ の複素構造と整合的な微分作用素 $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}\colon \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E)$ に対し，$(\mathscr{E}, h)$ の局所ユニタリ枠 $\{e_i\}_{i=1}^r$ を取って，対応する $(0,1)$ 形式を $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^r$ とおく;

$$\overline{\partial}_{\mathscr{E}} e_j = \sum_{i=1}^r e_i \alpha_{ij}. \tag{9.7.1}$$

$(\mathscr{E}, h)$ の局所ユニタリ枠 $\{e_i\}_{i=1}^r$ に関する $\mathscr{E}$ の接続 d_A に付随する接続 1 形式を A とおくと，分解

$$\Omega^1(X) \otimes \mathbb{C} = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X) \tag{9.7.2}$$

によって A は

$$A = A^{1,0} + A^{0,1} \tag{9.7.3}$$

と分解される. 複素共役によって 1 次微分形式の $(1,0)$ 部分と $(0,1)$ 部分は入れ替わるので,

$$(A^*)^{1,0} = \left(A^{0,1}\right)^*, \quad (A^*)^{0,1} = \left(A^{1,0}\right)^* \tag{9.7.4}$$

となる. ユニタリ接続であるという条件は

$$A + A^* = 0 \tag{9.7.5}$$

であり，A が $\mathscr{E}$ の正則構造と整合的であるという条件は

$$A^{0,1} = \alpha \tag{9.7.6}$$

である. これらの条件から,

$$A^{1,0} = -\left(A^{0,1}\right)^* = -\alpha^*, \quad A = \alpha - \alpha^* \tag{9.7.7}$$

を得る. 従って，$\mathscr{E}$ の正則構造と整合的なユニタリ接続は，存在すれば一意的である.

次に存在を示す. E の局所自明化を与える X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を一つ選

んで固定する．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，$E|_{U_\lambda}$ 上には (9.7.7) で定まる正則構造と整合的なユニタリ接続 A_λ が存在する．任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，$A_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ と $A_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ はどちらも，正則構造と整合的な $E|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ のユニタリ接続を与える．上で示した一意性からこれらは一致するので，これらの局所的な接続は貼り合って $\mathscr{E}$ の大域的な接続を定める． □

命題 9.7.1 の局所正則枠を用いた証明. 一意性を示すために，X および $\mathscr{E}$ の複素構造と整合的な $(\mathscr{E}, h)$ 上のユニタリ接続 d_A が存在すると仮定する．E の正則局所枠 $(e_i)_{i=1}^r$ を選んで，それに付随する接続 1 形式を $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1}^r$ とおく；

$$d_A e_j = \sum_{i=1}^r e_i \omega_{ij}. \tag{9.7.8}$$

正則構造との整合性と，$(e_i)_{i=1}^r$ が正則局所枠であることから

$$\overline{\partial}_A e_i = \overline{\partial}_{\mathscr{E}} e_i = 0 \tag{9.7.9}$$

となり，ω は $(1,0)$ 形式であることが分かる．

$$h_{ij} = h(e_i, e_j) \tag{9.7.10}$$

とおくと，d_A が h を保つので

$$\begin{aligned} dh_{ij} &= d\left(h\left(e_i, e_j\right)\right) && (9.7.11)\\ &= h\left(d_A e_i, e_j\right) + h\left(e_i, d_A e_j\right) && (9.7.12)\\ &= h\left(\sum_{k=1}^r e_k \omega_{ki}, e_j\right) + h\left(e_i, \sum_{k=1}^r e_k \omega_{kj}\right) && (9.7.13)\\ &= \sum_{k=1}^r \omega_{ki} h_{kj} + \sum_{k=1}^r h_{ik} \overline{\omega}_{kj} && (9.7.14) \end{aligned}$$

となる．ω が $(1,0)$ 形式であることから，(9.7.14) を $(1,0)$ 成分と $(0,1)$ に分けることによって

$$\partial h_{ij} = \sum_{k=1}^r \omega_{ki} h_{kj}, \tag{9.7.15}$$

$$\overline{\partial} h_{ij} = \sum_{k=1}^r h_{ik} \overline{\omega}_{kj} \tag{9.7.16}$$

を得る．これを行列の記号で表すと

$$\partial h = \omega^T h, \tag{9.7.17}$$

$$\overline{\partial} h = h \overline{\omega} \tag{9.7.18}$$

となる．(9.7.17) から

$$\omega = \left((\partial h)\, h^{-1}\right)^T \tag{9.7.19}$$

となり，$\mathscr{E}$ の正則構造と整合的な $(\mathscr{E}, h)$ 上のユニタリ接続は，存在すれば一意的である事が分かる．

一方，h の Hermite 性から，(9.7.17) の両辺の Hermite 共役を取ることによって (9.7.18) を得る．すなわち，(9.7.19) によって，正則構造と整合的なユニタリ接続は局所的には存在する．ここで一意性を用いると，これらが貼り合って大域的な接続を定めることが分かる．□

9.8 複素ゲージ変換群

複素ベクトル束 E の複素ベクトル束としての自己同型群

$$\mathscr{G}_{\mathbb{C}}(P) := \operatorname{Aut} E \tag{9.8.1}$$

を**複素ゲージ変換群** (complexified gauge transformation group) と呼ぶ．これはゲージ変換群の複素化になっている．

P のユニタリ接続全体のなす空間を $\mathscr{A}(P)$ で表す．接続 $A \in \mathscr{A}(P)$ に対し，その曲率 $F_A \in \Omega^2(P \times_G \mathfrak{g})$ は分解

$$\Omega^2(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Omega^{2,0}(X) \oplus \Omega^{1,1}(X) \oplus \Omega^{0,2}(X) \tag{9.8.2}$$

によって

$$F_A = F_A^{2,0} + F_A^{1,1} + F_A^{0,2} \tag{9.8.3}$$

と分解され，A のユニタリ性から

$$\left(F_A^{2,0}\right)^* = -F^{0,2}, \quad \left(F_A^{1,1}\right)^* = -F^{1,1} \tag{9.8.4}$$

となる．

$$\mathscr{A}^{1,1}(P) := \left\{ A \in \mathscr{A}(P) \;\middle|\; F_A^{0,2} = 0 \right\} \tag{9.8.5}$$

とおくと，定理 9.6.1 から，任意の $A \in \mathscr{A}^{1,1}(P)$ に対し，$\overline{\partial}_A$ は E 上の正則構造を定める．$A, A' \in \mathscr{A}^{1,1}(P)$ が定める正則ベクトル束 $\mathcal{E}_A$ と $\mathcal{E}_{A'}$ が同型であるための必要十分条件は，E の複素ベクトル束としての自己同型 $g \in \operatorname{Aut}(E)$ で，任意の $s \in \Gamma(E)$ に対し

$$(\overline{\partial}_{A'} \circ g)(s) = \left(g \circ \overline{\partial}_A\right)(s) \tag{9.8.6}$$

が成り立つようなものが存在することである．これは，

$$\overline{\partial}_{A'} = g \circ \overline{\partial}_A \circ g^{-1} = \overline{\partial}_A - \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1} \tag{9.8.7}$$

と書き換えることができる．

命題 9.7.1 によって，P のユニタリ接続 d_A を与える事と，その $(0,1)$ 成分 $\overline{\partial}_A$ を与える事は同値である．接続 $A \in \mathscr{A}^{1,1}$ と複素ゲージ変換 $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ に対し，新しい接続 $g(A)$ を，$(0,1)$ 成分が

$$\overline{\partial}_{g(A)} = \overline{\partial}_A - \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1} \tag{9.8.8}$$

となるようなユニタリ接続として定義する．この時，$g(A) \in \mathscr{A}^{1,1}$ の $(1,0)$ 成分 $\partial_{g(A)}$ は，(9.7.7) より $\widetilde{g} = (g^*)^{-1}$ に対し

$$\partial_{g(A)} = \partial_A + \left(\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\right)^* \tag{9.8.9}$$

$$= \partial_A + (g^*)^{-1} \left(\partial_A g^*\right) \tag{9.8.10}$$

$$= \widetilde{g} \circ \partial_A \circ \widetilde{g}^{-1} \tag{9.8.11}$$

で与えられる．これによって $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ の $\mathscr{A}^{1,1}$ への作用が定まる．正則ベクトル束の同型類のなす集合 $\mathscr{M}$ は，$\mathscr{A}^{1,1}$ の $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ 軌道の集合と 1 対 1 に対応する;

$$\mathscr{M} \cong \mathscr{A}^{1,1}/\mathscr{G}_{\mathbb{C}}. \tag{9.8.12}$$

与えられた正則 Hermite ベクトル束 $(\mathscr{E}, h)$ に対し，$(\mathscr{E}, h)$ の標準接続の $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ 作用による軌道を $O(\mathscr{E})$ と書く．正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ 上の Hermite 構造の同型類のなす集合は，$O(\mathscr{E})$ の $\mathscr{G}$ 軌道の集合 $O(\mathscr{E})/\mathscr{G}$ と 1 対 1 に対応する．

上では E 上の Hermite 構造 h を固定して正則構造 $\overline{\partial}$ を動かしたが，(9.7.18) より

$$\overline{\omega} = h^{-1}\overline{\partial}h \mapsto h^{-1}\left(g\overline{\partial}g^{-1}\right)h = \left(g^{-1}h\right)^{-1}\overline{\partial}\left(g^{-1}h\right) \tag{9.8.13}$$

なので，正則構造 $\overline{\partial}$ を固定して Hermite 構造 h を

$$h \mapsto g^{-1}h \tag{9.8.14}$$

によって動かすと考えることもできる．これらの 2 つの見方（すなわち，Hermite 構造 h を固定して正則構造 $\overline{\partial}$ を動かすか，それとも正則構造 $\overline{\partial}$ を固定して Hermite 構造 h を動かすか）は完全に同等である．以下では定理の主張を述べる際には後者を，証明をする際には前者を採用する．

9.9 勾配と安定性

Riemann 面上のベクトル束に対し，次数と階数の比を**勾配** (slope) と呼ぶ;

$$\mu(\mathscr{E}) = \frac{\deg \mathscr{E}}{\operatorname{rank} \mathscr{E}}. \tag{9.9.1}$$

正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ は，任意の正則部分束 $\mathscr{F}$ に対して

$$\mu(\mathscr{F}) \leq \mu(\mathscr{E}) \tag{9.9.2}$$

が成り立つ時，**半安定** (semistable) と呼ばれる．より強く，任意の真正則部分束 $\mathscr{F}$ に対して

$$\mu(\mathscr{F}) < \mu(\mathscr{E}) \tag{9.9.3}$$

が成り立つ時，$\mathscr{E}$ は**安定** (stable) であると言う．また，半安定でない正則ベクトル束は**不安定** (unstable) と呼ばれる．正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が**可約** (decomposable) であるとは，適当なベクトル束 $\mathscr{E}_1$ と $\mathscr{E}_2$ によって $\mathscr{E} \cong \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$ となる事を指す．可約でない正則ベクトル束は**直既約** (indecomposable) と呼ばれる．ユニタリ接続に対しても同様に，ユニタリ接続 2 つの直和と同型である時に**可約** (reducible) と言い，可約でない時に**直既約** (irreducible) と言う．

9.10 Narasimhan–Seshadri の定理

定中心曲率接続方程式 (9.5.25) の両辺の跡を X で積分することにより，

$$\deg \mathscr{E} = \mu \operatorname{rank} \mathscr{E} \tag{9.10.1}$$

すなわち

$$\mu = \mu(\mathscr{E}) \tag{9.10.2}$$

を得る．但し，X の体積は 1 に規格化されていると仮定した．特に，次数 0 のベクトル束に対しては，定中心曲率接続であることと曲率が 0 であること，すなわち**平坦接続** (flat connection) であることは同値である．

定理 9.10.1 (Narasimhan–Seshadri [108])**.** Riemann 面 X 上の直既約正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が安定であるための必要十分条件は，$\mathscr{E}$ 上の Hermite 計量で，それに付随するユニタリ接続が定中心曲率であるようなものが存在することである．また，任意の直既約正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，その上の定中心曲率 Hermite 計量は存在すれば一意的である．

この章の残りの部分を使って，この Narasimhan–Seshadri の定理の Donaldson [35] による証明を紹介する．

9.11 Sobolev 空間

この節では Sobolev 空間に関する基本的な事実を復習する．X を n 次元のコンパクト Riemann 多様体とする．測度空間上の関数 f と g は，零集合を除いて一致する時に同値であると定義する．$p \in [1, \infty)$ に対し，$|f|^p$ が可積分で

あるような X 上の可測関数の同値類の集合を $L^p(X)$ で表す．また，$p=\infty$ に対し，**本質的有界** (essentially bounded，すなわち，零集合を除いて有界) であるような可測関数の同値類の集合を $L^\infty(X)$ で表す．関数 $f\colon X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ の**本質的上限** (essential supremum) は

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f := \inf\{a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\mid \text{殆ど全ての } x\in X \text{ に対し } f(x)\le a\} \tag{9.11.1}$$

で定義される．$L^p(X)$ は

$$\|f\|_{L^p(X)} := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mathrm{vol}_X\right)^{\frac{1}{p}} & p\in[1,\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)| & p=\infty \end{cases} \tag{9.11.2}$$

をノルムとするような Banach 空間になる．L^p ノルムの三角不等式を **Minkowski の不等式** (Minkowski's inequality) と呼ぶ．L^p 空間については次の **Hölder の不等式** (Hölder's inequality) が基本的である:

定理 9.11.1 (Hölder の不等式). $p,q,r\in[1,\infty]$ が

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \tag{9.11.3}$$

を満たせば，任意の $f\in L^p(X)$ と $g\in L^q(X)$ に対して

$$\|fg\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \tag{9.11.4}$$

が成り立つ．

Minkowski の不等式は Hölder の不等式から導かれる．X のコンパクト性から，任意の $1\le p\le q\le\infty$ に対して

$$L^p(X)\supset L^q(X) \tag{9.11.5}$$

が成り立つ．$p,p^*\in[1,\infty]$ が

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1 \tag{9.11.6}$$

を満たす時，p と p^* は **Hölder 共役** (Hölder conjugate) であると言う．$p\in(1,\infty)$ の時，$L^{p^*}(X)$ は $L^p(X)$ の位相線形空間としての双対空間になる．従って，$1<p<\infty$ に対して $L^p(X)$ は反射的 Banach 空間である．一方，$L^1(X)$ の双対空間は $L^\infty(X)$ であるが，$L^\infty(X)$ の双対空間は $L^1(X)$ を真に含むので，$L^1(X)$ や $L^\infty(X)$ は反射的ではない．

Banach 空間 V の点列 $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ に対し，ある元 $v\in B$ が存在して，双対空間 V^* の任意の元 v^* に対して $\mathbb{R}$ の点列 $\{v^*(v_i)\}_{i=1}^\infty$ が $v^*(v)$ に収束する時，$\{v_i\}_{i=1}^\infty$ は v に**弱収束する** (weakly converge) と言うのであった．Banach 空

間におけるノルムは弱収束に関して下半連続であることが知られている;

$$\|v\| \leq \liminf_{i\to\infty} \|v_i\|. \tag{9.11.7}$$

(9.11.7) で等号が成立しない典型例は 2 乗総和可能な点列のなす Hilbert 空間

$$\ell^2 := \left\{ (a_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \right\} \tag{9.11.8}$$

における正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ である．実際，この時 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $i \to \infty$ で 0 に弱収束するので，(9.11.7) の左辺は 0，右辺は 1 になる．

$L^1(X)$ の元 f は，ある $g \in L^1(X, T^*X)$ が存在して，任意の $Y \in C^{\infty}(X, TX)$ と任意の $\omega \in C^{\infty}(X, \bigwedge^n T^*X)$ に対して

$$\int_X (\iota_Y g)\,\omega = -\int_X f\,(\mathscr{L}_Y \omega) \tag{9.11.9}$$

を満たす時，**弱微分可能** (weakly differentiable) であると言う．また，この時の g を f の**弱導関数** (weak derivative) と呼ぶ．自然数 k と $p \in [1, \infty]$ に対し，k 階弱微分可能で，しかも k 階の弱導関数が再び $L^p(X)$ に入るような元全体のなす $L^p(X)$ の部分空間を **Sobolev 空間** (Sobolev space) と呼び，$L^p_k(X)$ で表す．Sobolev 空間は **Sobolev ノルム** (Sobolev norm)

$$\|f\|_{L^p_k(X)} = \sum_{i=0}^{k} \left\|\nabla^i f\right\|_{L^p(X)} \tag{9.11.10}$$

に関して Banach 空間になる．また，この定義を拡張して，任意の $k \in \mathbb{R}$ と $p \in [1, \infty]$ に対して $L^p_k(X)$ を定義することもできる．

定理 9.11.2 (Sobolev の埋め込み定理 (Sobolev embedding theorem)**).**
$k \geq l$ かつ $k - \dfrac{n}{p} \geq l - \dfrac{n}{q}$ であれば $L^p_k(X) \subset L^q_l(X)$ である．

ここで，位相ベクトル空間 V と W に対し $V \subset W$ とは，ベクトル空間としての埋め込みがあって，その埋め込みが連続であることを指す．従って，$k \geq l$ かつ $k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}$ であれば，任意の $f \in L^p_k(X)$ に対し，f の L^p_k ノルムが f の L^q_l ノルムで上から押さえられることになる．これを **Sobolev の不等式** (Sobolev inequality) と呼ぶ．

Banach 空間の間の有界線形作用素 $B\colon V \to W$ は，V の任意の有界点列の B による像が収束する部分列を持つ時に**コンパクト** (compact) と呼ばれる．V が W の部分空間で埋め込み写像がコンパクトである時，$V \Subset W$ と書く．Sobolev の埋め込みは，ぎりぎりでなければコンパクトである:

定理 9.11.3 (Rellich–Kondrachov の定理).
$k > l$ かつ $k - \dfrac{n}{p} > l - \dfrac{n}{q}$ であれば $L^p_k(X) \Subset L^q_l(X)$ である．

また，次の定理も Sobolev の埋め込み定理と呼ばれる．

定理 9.11.4. $k - \dfrac{n}{p} > l$ であれば $L^p_k(X) \Subset C^l(X)$ である．

Sobolev の埋め込み定理と Hölder の不等式から次が分かる:

定理 9.11.5. $k - \frac{n}{p} > 0$，$k \geq l$，$k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}$ かつ $l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ の時，乗法写像

$$L^p_k(X) \otimes L^q_l(X) \to L^q_l(X), \quad f \otimes g \mapsto fg \tag{9.11.11}$$

は連続である．

証明. Sobolev ノルムの定義 (9.11.10) から

$$\|fg\|_{L^q_l} = \sum_{i=0}^{l} \left\|\nabla^i(fg)\right\|_{L^q} \tag{9.11.12}$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \left\| \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} (\nabla^r f)(\nabla^{i-r} g) \right\|_{L^q} \tag{9.11.13}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{l} \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \left\|(\nabla^r f)(\nabla^{i-r} g)\right\|_{L^q} \tag{9.11.14}$$

なので，$a + b \leq l$ となるような任意の自然数 a, b に対して不等式

$$\left\|(\nabla^a f)(\nabla^b g)\right\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p_k} \|g\|_{L^q_l} \tag{9.11.15}$$

を示せばよい．ここで，C は X, p, q, k, l, a および b にのみ依存する定数である．$f \in L^p_k(X)$ より $\nabla^a f \in L^p_{k-a}(X)$ であるが，Sobolev の埋め込み定理より

$$L^p_{k-a}(X) \subset \begin{cases} C^0(X) & (k-a) - \frac{n}{p} > 0, \\ L^\infty(X) & (k-a) - \frac{n}{p} = 0, \\ L^{p'}(X) & (k-a) - \frac{n}{p} < 0 \end{cases} \tag{9.11.16}$$

となる．ここで $(k-a) - \frac{n}{p} < 0$ の時，$p' \in [1, \infty)$ を

$$(k-a) - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p'} \tag{9.11.17}$$

で定義した．$a \leq l \leq k$ より，$p < p' < \infty$ である．同様に，

$$\nabla^b g \in L^q_{l-b}(X) \subset \begin{cases} C^0(X) & (l-b) - \frac{n}{q} > 0, \\ L^\infty(X) & (l-b) - \frac{n}{q} = 0, \\ L^{q'} & (l-b) - \frac{n}{q} < 0 \end{cases} \tag{9.11.18}$$

となる．ただし，$(l-b) - \frac{n}{q} < 0$ の時

$$(l-b) - \frac{n}{q} = -\frac{n}{q'} \tag{9.11.19}$$

とおいた．ここで，$(k-a) - \frac{n}{p}$ および $(l-b) - \frac{n}{q}$ の正負で場合分けをする:

1. $(k-a)-\frac{n}{p}\geq 0$ かつ $(l-b)-\frac{n}{q}\geq 0$ の時,

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)\hookrightarrow L^\infty(X)\otimes L^\infty(X) \tag{9.11.20}$$
$$\hookrightarrow L^{2q}(X)\otimes L^{2q}(X) \tag{9.11.21}$$
$$\to L^q(X) \tag{9.11.22}$$

となる.

2. $(k-a)-\frac{n}{p}\geq 0$ かつ $(l-b)-\frac{n}{q}<0$ の時は，さらに次のように場合分けをする:

(i) $b=l$ の時 $a=0$ である. 仮定から $k-\frac{n}{p}>0$ なので $L^p_k(X)\subset C^0(X)$ であり,

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)=L^p_k(X)\otimes L^q(X) \tag{9.11.23}$$
$$\hookrightarrow C^0(X)\otimes L^q(X) \tag{9.11.24}$$
$$\to L^q(X) \tag{9.11.25}$$

となる.

(ii) $b<l$ の時,

$$r=\frac{n}{l-b} \tag{9.11.26}$$

とおくと, $(l-b)-\frac{n}{q}<0$ より $r>q$ であり，しかも

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{q'}=\frac{l-b}{n}+\left(-\frac{l-b}{n}+\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{q} \tag{9.11.27}$$

となる. $(k-a)-\frac{n}{p}\geq 0$ より $L^p_{k-a}(X)\subset L^\infty(X)$ なので,

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)\hookrightarrow L^\infty(X)\otimes L^{q'}(X) \tag{9.11.28}$$
$$\hookrightarrow L^r(X)\otimes L^{q'}(X) \tag{9.11.29}$$
$$\to L^q(X) \tag{9.11.30}$$

である.

3. $(k-a)-\frac{n}{p}<0$ かつ $(l-b)-\frac{n}{q}\geq 0$ の時,

$$(k-a)-\frac{n}{p}\geq (k-l)-\frac{n}{p}\geq -\frac{n}{q} \tag{9.11.31}$$

より $L^p_{k-a}\hookrightarrow L^q$ となる.

(i) (9.11.31) で等号が成立している時, $a=l$ かつ $k-\frac{n}{p}=l-\frac{n}{q}$ となる. $a=l$ より $b=0$ であり,

$$(l-b)-\frac{n}{q}=l-\frac{n}{q}=k-\frac{n}{p} \tag{9.11.32}$$

である．仮定から $k-\frac{n}{q}>0$ なので $l-\frac{n}{q}>0$ である．従って $L^q_l(X)\subset C^0(X)$ であり，

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)\hookrightarrow L^q(X)\otimes C^0(C) \tag{9.11.33}$$
$$\to L^q(X) \tag{9.11.34}$$

となる．

(ii) (9.11.31) で等号が成立していない時，十分小さな正数 ϵ に対して

$$L^p_{k-a}\hookrightarrow L^{q+\epsilon} \tag{9.11.35}$$

となる．ここで，

$$\frac{1}{q+\epsilon}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q} \tag{9.11.36}$$

によって $r\in(1,\infty)$ を定義すると，

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)\hookrightarrow L^{q+\epsilon}(X)\otimes L^\infty(X) \tag{9.11.37}$$
$$\hookrightarrow L^{q+\epsilon}(X)\otimes L^r(X) \tag{9.11.38}$$
$$\to L^q \tag{9.11.39}$$

となる．

4. $(k-a)-\frac{n}{p}<0$ かつ $(l-b)-\frac{n}{q}<0$ の時，$r\in(0,\infty)$ を

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} \tag{9.11.40}$$

で定義すると，

$$\frac{1}{r}=-\frac{1}{n}\left[\left\{(k-a)-\frac{n}{p}\right\}+\left\{(l-b)-\frac{n}{q}\right\}\right] \tag{9.11.41}$$
$$=-\frac{1}{n}\left[k+(l-a-b)-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right] \tag{9.11.42}$$
$$\leq-\frac{1}{n}\left[k-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right] \tag{9.11.43}$$
$$\leq-\frac{1}{n}\left[-\frac{n}{q}\right] \tag{9.11.44}$$
$$=\frac{1}{q} \tag{9.11.45}$$

より，

$$L^p_{k-a}(X)\otimes L^q_{l-b}(X)\hookrightarrow L^{p'}(X)\otimes L^{q'}(X) \tag{9.11.46}$$
$$\to L^r(X) \tag{9.11.47}$$
$$\hookrightarrow L^q \tag{9.11.48}$$

となる． □

系 9.11.6. $k - \frac{n}{p} > 0$ かつ $0 \le j \le k$ の時，$L^p_k(X)$ は Banach 代数であり，$L^p_j(X)$ は $L^p_k(X)$ 加群である．

X が Riemann 面の時，$(n,p,k) = (2,2,2)$ および $(2,2,1)$ に対し，$k - \frac{n}{p}$ はそれぞれ 1 および 0 になるので，L^2_2 ゲージ変換は連続であるが，L^2_1 接続は一般には連続ですらない．系 9.11.6 から，L^2_2 ゲージ変換の集合 $\mathscr{G}^2_2$ は群になり，L^2_1 接続のなす空間 $\mathscr{A}^2_1$ にゲージ変換として作用する事が分かる．

9.12 Harder–Narasimhan フィルトレーション

X をコンパクト Riemann 面とする．

定理 9.12.1 (Harder–Narasimhan [59])**.** 任意の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，部分束の列

$$0 = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_k = \mathscr{E} \tag{9.12.1}$$

で，任意の $i = 1, \ldots, k$ に対し $\mathscr{D}_i := \mathscr{F}_i / \mathscr{F}_{i-1}$ が半安定ベクトル束で，その勾配が不等式

$$\mu(\mathscr{D}_1) > \mu(\mathscr{D}_2) > \cdots > \mu(\mathscr{D}_k) \tag{9.12.2}$$

を満たすようなものが唯一つ存在する．

定理 9.12.1 に現れる部分束の列 (9.12.1) を $\mathscr{E}$ の **Harder–Narasimhan フィルトレーション** (Harder–Narasimhan filtration) と呼ぶ．また，半安定束については次の定理が成立する:

定理 9.12.2. 任意の半安定ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，部分束の列

$$0 = \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{E}_l = \mathscr{E} \tag{9.12.3}$$

で，任意の $i = 1, \ldots, l$ に対し $\mathscr{C}_i := \mathscr{E}_i / \mathscr{E}_{i-1}$ が安定ベクトル束になるようなものが存在する．このような部分束の列は一意的ではないが，逐次商の列 $(\mathscr{C}_i)_{i=1}^l$ は順序の入れ替えを除いて一意的である．

部分束の列 (9.12.3) を **Jordan–Hölder フィルトレーション** (Jordan–Hölder filtration) と呼ぶ．

Riemann 面上の安定ベクトル束を調べる際には，次の補題を頻繁に使う:

補題 9.12.3. Riemann 面 X 上の正則ベクトル束の間の正則写像 $\alpha \colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ が与えられた時，各行がベクトル束の完全であるような可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{S}_1 & \xrightarrow{\iota_1} & \mathscr{E}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathscr{Q}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \beta & & \\
0 & \longleftarrow & \mathscr{Q}_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \mathscr{E}_2 & \xleftarrow{\iota_2} & \mathscr{S}_2 & \longleftarrow & 0
\end{array}
\tag{9.12.4}
$$

で，$\operatorname{rank}\mathscr{Q}_1 = \operatorname{rank}\mathscr{S}_2$ かつ $\det\beta \neq 0$ となるものが存在する．

証明．コンパクト Riemann 面 X に対し，対応する複素射影代数曲線を C と書く．C の構造層 $\mathcal{O}_C$ は Dedekind 整域の層である．X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{Q}$ に対応する C 上の局所自由層をそれぞれ $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ と書く．また，正則ベクトル束の間の正則写像に対応する $\mathcal{O}_C$ 加群の準同型写像を，記号を濫用して同じ記号で書く事にする．A を Dedekind 整域，A の商体を K とする．局所自由 A 加群 M と M の部分 A 加群 N に対し，

$$
KN \cap M := \{m \in M \mid \text{ある } f \in K \text{ と } n \in N \text{ が存在して } m = fn\}
\tag{9.12.5}
$$

は N を含む M の部分 A 加群になるが，これを N の M における**飽和** (saturation) と呼ぶ．局所自由加群の階数は対応する商体上の線形空間の次元なので，飽和によって変化しない．また，N の M における飽和が N に等しい時，N は M で**飽和している** (saturated) と言う．局所自由層の埋め込み $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$ が正則ベクトル束の埋め込み $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{E}$ に対応するための必要十分条件は，C の任意のアファイン開集合 $\operatorname{Spec} A \subset C$ に対し，$\mathcal{E}$ に対応する A 加群を M，$\mathcal{F}$ に対応する M の部分 A 加群を N とおくと，N が M で飽和していることである．

局所自由 $\mathcal{O}_C$ 加群の準同型 $\alpha\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ に対し，α の像 $\operatorname{Im}\alpha$ は $\mathcal{E}_2$ の部分層であるが，一般には部分束ではない．$\operatorname{Im}\alpha$ の飽和を $\mathcal{S}_2$ とおくと，写像 $\alpha\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ は埋め込み $\iota_2\colon \mathcal{S}_2\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}_2$ を経由する．すなわち，ある $\gamma\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{S}_2$ が存在して $\alpha = \iota_2 \circ \gamma$ となる．

$$
\mathcal{S}_1 := \ker\gamma
\tag{9.12.6}
$$

とおくと，これは $\mathcal{E}_1$ の部分層であるが，局所自由層の部分層なのでねじれがない．Dedekind 環上の有限生成加群に対しては，ねじれがないことと局所自由であることは同値なので，$\mathcal{S}_1$ は局所自由層である．整域上の加群の準同型の核は常に飽和しているので，$\mathcal{S}_1$ は $\mathcal{E}_1$ の部分束である．対応する商層を $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{E}_1/\mathcal{S}_1$ とおくと，核の定義より γ は $\mathcal{Q}_1$ を経由する．すなわち，ある $\beta\colon \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{S}_2$ が存在して $\gamma = \beta \circ \pi_1$ となる．構成から明らかに $\operatorname{rank}\mathcal{Q}_1 = \operatorname{rank}\mathcal{S}_2$ かつ $\det\beta \neq 0$ となり，補題 9.12.3 は証明された． □

正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ は，0 でない正則自己準同型写像が同型写像になる時，すなわち

$$
\operatorname{End}(\mathscr{E}) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{E}}
\tag{9.12.7}
$$

を満たす時，**単純** (simple) と呼ばれる．

系 9.12.4. Riemann 面上の安定ベクトル束は単純である．

証明．Riemann 面上の安定ベクトル束 $\mathscr{E}$ が単純ではないと仮定して，同型でない自己準同型写像 $\alpha \in \operatorname{End}(\mathscr{E})$ を取ると，補題 9.12.3 において $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ となる．$\mathscr{Q}_1$ が $\mathscr{E}$ の商束なので，$\mathscr{E}$ の安定性より

$$\mu(\mathscr{Q}_1) > \mu(\mathscr{E}) \tag{9.12.8}$$

となる．一方，$\mathscr{S}_2$ は $\mathscr{E}$ の部分束なので，再び $\mathscr{E}$ の安定性より

$$\mu(\mathscr{S}_2) < \mu(\mathscr{E}) \tag{9.12.9}$$

となるが，これは $\det \beta \neq 0$ から来る

$$\mu(\mathscr{Q}_1) \leq \mu(\mathscr{S}_2) \tag{9.12.10}$$

に矛盾する． □

定義 9.12.5. X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，次の 2 つの条件を満たす $\mathscr{E}$ の部分束 $\mathscr{E}_\diamond$ を**極大不安定化部分束** (maximally destabilizing subbundle) と呼ぶ:

(i) $\mathscr{E}_\diamond$ は半安定である．
(ii) 任意の $\mathscr{E}_\diamond \subsetneq \mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ に対し，$\mu(\mathscr{F}) < \mu(\mathscr{E}_\diamond)$ となる．

正則ベクトル束が半安定であるための必要十分条件は，その極大不安定化部分束が全体に一致することである．

定理 9.12.1 の証明の鍵は次の命題 9.12.6 および命題 9.12.7 である:

命題 9.12.6. 任意の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，その極大不安定化部分束が唯一つ存在する．

命題 9.12.7. 正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が Harder–Narasimhan フィルトレーション (9.12.1) を持てば，$\mathscr{F}_1$ は $\mathscr{E}$ の極大不安定化部分束である．

これらの命題の証明に取り掛かる前に少し準備をする．

補題 9.12.8 (シーソー原理)**.** 正則ベクトル束の完全列

$$0 \to \mathscr{V}_1 \to \mathscr{V} \to \mathscr{V}_2 \to 0 \tag{9.12.11}$$

に対し，$\mu(\mathscr{V}_1) \geq \mu(\mathscr{V})$ と $\mu(\mathscr{V}) \geq \mu(\mathscr{V}_2)$ は同値である．

証明．$\mathscr{V}$, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ の階数および次数をそれぞれ r, r_1, r_2 および d, d_1, d_2 とお

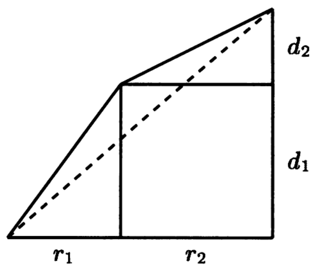


図 9.1　シーソー原理.

く．階数および次数は完全列に関して加法的なので，(9.12.11) より

$$r = r_1 + r_2, \quad d = d_1 + d_2 \tag{9.12.12}$$

となる．主張は (9.12.12) と図 9.1 から明らかであり，また

$$\begin{aligned}
\mu(\mathscr{S}) - \mu(\mathscr{E}) &= \frac{d_1}{r_1} - \frac{d}{r} && (9.12.13)\\
&= \frac{d_1}{r_1} - \frac{d_1 + d_2}{r_1 + r_2} && (9.12.14)\\
&= \frac{d_1(r_1 + r_2) - r_1(d_1 + d_2)}{r_1(r_1 + r_2)} && (9.12.15)\\
&= \frac{d_1 r_2 - r_1 d_2}{r_1(r_1 + r_2)}, && (9.12.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\mathscr{E}) - \mu(\mathscr{Q}) &= \frac{d}{r} - \frac{d_2}{r_2} && (9.12.17)\\
&= \frac{d_1 + d_2}{r_1 + r_2} - \frac{d_2}{r_2} && (9.12.18)\\
&= \frac{(d_1 + d_2)r_2 - (r_1 + r_2)d_2}{(r_1 + r_2)r_2} && (9.12.19)\\
&= \frac{d_1 r_2 - r_1 d_2}{(r_1 + r_2)r_2} && (9.12.20)
\end{aligned}$$

からも従う．

系 9.12.9. 定義 9.12.5 の条件 (ii) は次の条件と同値である;

$$\text{任意の } 0 \neq \mathscr{Q} \subset \mathscr{E}/\mathscr{E}_\diamond \text{ に対し，} \mu(\mathscr{Q}) < \mu(\mathscr{E}_\diamond) \text{ となる．} \tag{9.12.21}$$

証明. $\mathscr{Q} \subset \mathscr{E}/\mathscr{E}_\diamond$ を選ぶ事と $\mathscr{E}_\diamond \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{E}$ を選ぶ事は，$\mathscr{Q} = \mathscr{G}/\mathscr{E}_\diamond$ によって同値になる．

$$r_1 := \operatorname{rank} \mathscr{E}_\diamond, \quad r_2 := \operatorname{rank} \mathscr{Q}, \quad r := \operatorname{rank} \mathscr{G} = r_1 + r_2, \tag{9.12.22}$$

$$d_1 := \deg \mathscr{E}_\diamond, \quad d_2 := \deg \mathscr{Q}, \quad d := \deg \mathscr{G} = d_1 + d_2 \tag{9.12.23}$$

とおくと，図 9.1 から

$$\mu(\mathscr{G}) = \frac{d}{r} < \mu(\mathscr{E}_\diamond) = \frac{d_1}{r_1} \tag{9.12.24}$$

と

$$\mu(\mathscr{Q}) = \frac{d_2}{r_2} < \mu(\mathscr{E}_\diamond) = \frac{d_1}{r_1} \tag{9.12.25}$$

は明らかに同値になる. □

系 9.12.10. 正則ベクトル束の任意の完全列

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0 \tag{9.12.26}$$

と任意の正則ベクトル束 $\mathscr{D}$ に対し, $\mu(\mathscr{D}) \geq \mu(\mathscr{A})$ かつ $\mu(\mathscr{D}) \geq \mu(\mathscr{C})$ ならば $\mu(\mathscr{D}) \geq \mu(\mathscr{B})$ である.

証明. シーソー原理により

$$\mu(\mathscr{A}) \leq \mu(\mathscr{B}) \leq \mu(\mathscr{C}) \tag{9.12.27}$$

または

$$\mu(\mathscr{A}) \geq \mu(\mathscr{B}) \geq \mu(\mathscr{C}) \tag{9.12.28}$$

である. 主張はこれから直ちに従う. □

系 9.12.11. 正則ベクトル束の列

$$0 = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_k = \mathscr{E} \tag{9.12.29}$$

と正則ベクトル束 $\mathscr{D}$ で, 任意の $i = 1, \ldots, k$ に対し $\mu(\mathscr{D}) \geq \mathscr{D}_i := \mathscr{F}_i / \mathscr{F}_{i-1}$ を満たすものが与えられた時,

$$\mu(\mathscr{D}) > \mu(\mathscr{E}) \tag{9.12.30}$$

が成立する.

証明. 系 9.12.10 を繰り返し適用することによって容易に主張を得る. □

補題 9.12.12. $\mathscr{E}$ を正則ベクトル束, $\mathscr{F}_1$ および $\mathscr{F}_2$ を $\mathscr{E}$ の部分束とする. $\mathscr{F}_1$ が半安定で, $\mathscr{F}_2$ が条件 (9.12.21) を満たし, しかも $\mathscr{F}_1 \not\subset \mathscr{F}_2$ であれば, $\mu(\mathscr{F}_1) < \mu(\mathscr{F}_2)$ である.

証明. 写像 $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{E}/\mathscr{F}_2$ に補題 9.12.3 を適用して, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{F}_1 & \longrightarrow & \mathscr{Q} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \beta & & \\ \mathscr{E}/\mathscr{F}_2 & \longleftarrow & \mathscr{S} & \longleftarrow & 0 \end{array} \tag{9.12.31}$$

を得る．$\mathscr{F}_1$ の半安定性から

$$\mu(\mathscr{F}_1) \le \mu(\mathscr{Q}) \tag{9.12.32}$$

であり，$\mathscr{F}_2$ に対する条件 (9.12.21) から

$$\mu(\mathscr{S}) < \mu(\mathscr{F}_2) \tag{9.12.33}$$

である．また，$\det\beta \neq 0$ より $\deg\mathscr{Q} \le \deg\mathscr{S}$ であり，これと $\operatorname{rank}\mathscr{Q} = \operatorname{rank}\mathscr{S}$ を併せて

$$\mu(\mathscr{Q}) \le \mu(\mathscr{S}) \tag{9.12.34}$$

を得る．従って $\mu(\mathscr{F}_1) < \mu(\mathscr{F}_2)$ である． □

命題 9.12.6 の証明. まず存在を示す．

$$\mu_0 = \sup_{0\neq\mathscr{F}\subset\mathscr{E}} \mu(\mathscr{F}) \tag{9.12.35}$$

とおく．$\mathscr{E}$ の不安定性から，$\mu_0 > \mu(\mathscr{E})$ である．$\mu(\mathscr{F})$ の分母は $\operatorname{rank} E$ より必ず小さいので，$\mu(\mathscr{F})$ の取り得る値は離散的である．また，任意の連接層 $\mathcal{F}$ と豊富な直線束 $\mathcal{L}$ に対し，k が十分大きければ $H^0(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes(-k)}) = 0$ なので，部分束の次数は上に有界である．従って，μ_0 の定義における上限は最大値になる．$\mu(\mathscr{F}) = \mu_0$ となる $\mathscr{F}\subset\mathscr{E}$ の中で，$\operatorname{rank}(\mathscr{F})$ が最大になるものを一つ取って $\mathscr{F}$ とおくと，

1. 任意の $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ に対し $\mu(\mathscr{G}) \le \mu(\mathscr{F})$
2. 任意の $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G} \subset \mathscr{E}$ に対し，$\mu(\mathscr{G}) < \mu(\mathscr{F})$

が成り立つ．前者から $\mathscr{F}$ の半安定性が従い，後者と系 9.12.9 から定義 9.12.5 の条件 (ii) が従う．

次に一意性を示す．$\mathscr{F}_1$ と $\mathscr{F}_2$ が共に定義 9.12.5 の条件 (ii) を満たす半安定ベクトル束であると仮定すると，$\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ でなければ $\mathscr{F}_1 \not\subset \mathscr{F}_2$ かつ $\mathscr{F}_2 \not\subset \mathscr{F}_1$ である．すると補題 9.12.12 から $\mu(\mathscr{F}_1) < \mu(\mathscr{F}_2)$ かつ $\mu(\mathscr{F}_2) < \mu(\mathscr{F}_1)$ が成り立つが，これは不合理であり，従って $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ である． □

命題 9.12.7 の証明. フィルトレーションの長さkに関する帰納法で示す．$k=1$ の時，主張は自明である．一般の k に対し，帰納法の仮定から

$$(\mathscr{E}/\mathscr{F}_1)_\diamond = \mathscr{F}_2/\mathscr{F}_1 \tag{9.12.36}$$

である．まず，$\mathscr{E}$ の任意の部分束 $\mathscr{A}$ に対し

$$\mu(\mathscr{A}) \le \mu(\mathscr{F}_1) \tag{9.12.37}$$

を示す．完全列

$$0 \to \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A} \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A}) \to 0 \tag{9.12.38}$$

に対し，(9.12.36) から

$$\mu(\mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A})) \leq \mu(\mathscr{F}_2/\mathscr{F}_1) \tag{9.12.39}$$

であり，これと

$$\mu(\mathscr{F}_2/\mathscr{F}_1) = \mu(\mathscr{D}_2) < \mu(\mathscr{D}_1) = \mu(\mathscr{F}_1) \tag{9.12.40}$$

から

$$\mu(\mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A})) < \mu(\mathscr{F}_1) \tag{9.12.41}$$

を得る．また，$\mathscr{F}_1$ の半安定性から

$$\mu(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A}) \leq \mu(\mathscr{F}_1) \tag{9.12.42}$$

である．(9.12.38)，(9.12.41)，(9.12.42) および系 9.12.10 から (9.12.37) が従う．

次に，任意の $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$ に対し，

$$\mu(\mathscr{A}) = \mu(\mathscr{F}_1) \tag{9.12.43}$$

ならば $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_1$ となる事を背理法で示す．$\mathscr{A} \not\subset \mathscr{F}_1$ は $\mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A}) \neq 0$ と同値である．(9.12.42) と (9.12.43) から

$$\mu(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A}) \leq \mu(\mathscr{A}) \tag{9.12.44}$$

である．従って，完全列 (9.12.38) とシーソー原理から

$$\mu(\mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A})) \geq \mu(\mathscr{A}) \tag{9.12.45}$$

となる．しかし，

$$\mu(\mathscr{A}) = \mu(\mathscr{F}_1) = \mu(\mathscr{D}_1) > \mu(\mathscr{D}_2) \tag{9.12.46}$$

なので

$$\mu(\mathscr{A}/(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{A})) > \mu(\mathscr{D}_2) \tag{9.12.47}$$

となり，これは帰納法の仮定(9.12.36) に反する．従って，$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_1$ である．□

定理 9.12.1 の証明． まず存在を示す．正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，$\mathscr{E}$ が半安定であれば $k = 1$ であり，自明な列

$$0 \subset \mathscr{E} \tag{9.12.48}$$

が Harder–Narasimhan フィルトレーションを与える．$\mathscr{E}$ が不安定であれば，

$\mathscr{E}$ の極大不安定化部分束を $\mathscr{F}_1$ とおく．商束 $\mathscr{E}/\mathscr{F}_1$ が半安定であれば，$k=2$ であり，

$$0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{E} \tag{9.12.49}$$

が Harder–Narasimhan フィルトレーションを与える．$\mathscr{E}/\mathscr{F}_1$ が不安定であれば，$\mathscr{E}/\mathscr{F}_1$ の極大不安定化部分束を $\mathscr{D}_2$ とおき，$\mathscr{D}_2$ の自然な射影 $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{F}_1$ による逆像を $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{E}$ とおく．すると，$\mathscr{F}_2/\mathscr{F}_1 \cong \mathscr{D}_2$ は半安定である．$\mathscr{E}/\mathscr{F}_2$ が半安定であれば，$k=3$ であり，

$$0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{E} \tag{9.12.50}$$

が Harder–Narasimhan フィルトレーションを与える．$\mathscr{E}/\mathscr{F}_2$ が半安定でなければ，その極大不安定化部分束を取って $\mathscr{D}_3$ とおく．この操作を繰り返して得られる $\mathscr{F}_i$ たちの階数は i に関して狭義単調に増加するので，この操作は有限回で停止する．定義 9.12.5 の条件 (ii) から，こうして得られた列に対し $\mu(\mathscr{D}_1) > \mu(\mathscr{D}_2) > \cdots > \mu(\mathscr{D}_k)$ が成り立つ．

次に一意性を示す．命題 9.12.7 から，フィルトレーションの初項 $\mathscr{F}_1$ は極大安定化部分束であり，従って命題 9.12.6 から一意的である．フィルトレーションの次の項 $\mathscr{F}_2$ は，$\mathscr{E}/\mathscr{F}_1$ の極大安定化部分束を $\mathscr{E}$ に引き戻したものであり，従って一意的である．以下同様にして，全ての $i=1,\ldots,k$ に対し，$\mathscr{F}_i$ が一意的である事が分かる． □

定理 9.12.2 の証明には次の補題を用いる:

補題 9.12.13 (Zassenhaus)**.** R を可換環，E を R 加群，F と G を E の部分加群，そして F' を F の部分加群，G' を G の部分加群とすると，自然な同型

$$(F \cap G + F')/(F \cap G' + F') \cong (F \cap G + G')/(F' \cap G + G') \tag{9.12.51}$$

が存在する．

証明．自然な R 加群の同型

$$(F \cap G + F')/F' \cong (F \cap G)/(F' \cap G) \tag{9.12.52}$$

において，左辺の部分加群 $F \cap G' + F'$ は右辺の部分加群 $F \cap G' + F' \cap G$ に対応する．従って，R 加群の同型

$$(F \cap G + F')/(F \cap G' + F') \cong (F \cap G)/(F \cap G' + F' \cap G) \tag{9.12.53}$$

が存在する．同様にして

$$(F\cap G+G')/(F'\cap G+G')\cong (F\cap G)/(F\cap G'+F'\cap G) \tag{9.12.54}$$

であり，(9.12.53) と (9.12.54) から直ちに (9.12.51) を得る． □

系 9.12.14. X を Riemann 面，$\mathscr{E}$ を X 上の正則ベクトル束，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ を $\mathscr{E}$ の正則部分束，そして $\mathscr{F}'$ を $\mathscr{F}$ の正則部分束，$\mathscr{G}'$ を $\mathscr{G}$ の正則部分束とすると，自然な同型

$$(\mathscr{F}\cap\mathscr{G}+\mathscr{F}')/(\mathscr{F}\cap\mathscr{G}'+\mathscr{F}')\cong(\mathscr{F}\cap\mathscr{G}+\mathscr{G}')/(\mathscr{F}'\cap\mathscr{G}+\mathscr{G}') \tag{9.12.55}$$

が存在する．

補題 9.12.15. $\mathscr{E}$ を Riemann 面上の正則ベクトル束，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{E}$ の正則部分束とする．$\mathscr{E}$ が半安定であり，$\mathscr{E}$ と $\mathscr{F}$ の勾配が一致していれば，$\mathscr{F}$ も半安定である．

証明. $\mathscr{F}$ の正則部分束は $\mathscr{E}$ の正則部分束でもある事と半安定性の定義から，主張は直ちに従う． □

補題 9.12.16. X を Riemann 面，$\mathscr{E}$ を X 上の正則ベクトル束，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ を $\mathscr{E}$ の正則部分束とする．$\mathscr{E}$，$\mathscr{F}$ および $\mathscr{G}$ が勾配 μ の半安定ベクトル束であれば，$\mathscr{F}+\mathscr{G}$ および $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ も勾配 μ の半安定ベクトル束である．

証明. $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ は $\mathscr{E}$ の正則部分束なので，

$$\mu(\mathscr{F}+\mathscr{G})\le\mu(\mathscr{E})=\mu \tag{9.12.56}$$

である．一方，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ が等しい勾配を持つ半安定束なので，$\mathscr{F}\oplus\mathscr{G}$ も半安定である．完全列

$$0\mapsto\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\to\mathscr{F}\oplus\mathscr{G}\to\mathscr{F}+\mathscr{G}\to 0 \tag{9.12.57}$$

から，

$$\mu(\mathscr{F}+\mathscr{G})\ge\mu(\mathscr{F}\oplus\mathscr{G})=\mu \tag{9.12.58}$$

なので，結局

$$\mu(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})=\mu(\mathscr{F}+\mathscr{G})=\mu \tag{9.12.59}$$

となる．従って，補題 9.12.15 から $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ および $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ も半安定である． □

定理 9.12.2 の証明. 半安定ベクトル束 $\mathscr{E}$ の 2 つの Jordan–Hölder フィルトレーション

$$0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_k = \mathscr{E} \tag{9.12.60}$$

と

$$0 \subset \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{G}_l = \mathscr{E} \tag{9.12.61}$$

が与えられた時,

$$\mathscr{F}_{i,j} := \mathscr{F}_{i+1} \cap \mathscr{G}_j + \mathscr{F}_i, \tag{9.12.62}$$

$$\mathscr{G}_{i,j} := \mathscr{F}_i \cap \mathscr{G}_{j+1} + \mathscr{G}_j \tag{9.12.63}$$

とおくと,

$$\mathscr{F}_i = \mathscr{F}_{i,0} \subset \mathscr{F}_{i,1} \subset \cdots \subset \mathscr{F}_{i,l} = \mathscr{F}_{i+1}, \tag{9.12.64}$$

$$\mathscr{G}_j = \mathscr{G}_{0,j} \subset \mathscr{G}_{1,j} \subset \cdots \subset \mathscr{G}_{l,j} = \mathscr{G}_{j+1} \tag{9.12.65}$$

であるが, $\mathscr{F}_{i,j}$ および $\mathscr{G}_{i,j}$ の半安定性と, $\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i+1}$ および $\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1}$ の安定性から, これらのフィルトレーションの包含写像はどこか 1 箇所を除いて同型になる. 系 9.12.14 から

$$\mathscr{F}_{i,j}/\mathscr{F}_{i,j-1} = (\mathscr{F}_{i+1} \cap \mathscr{G}_j + \mathscr{F}_i)/(\mathscr{F}_{i+1} \cap \mathscr{G}_{j-1} + \mathscr{F}_i) \tag{9.12.66}$$

$$\cong (\mathscr{F}_{i+1} \cap \mathscr{F}_j + \mathscr{G}_{j-1})/(\mathscr{F}_i \cap \mathscr{G}_j + \mathscr{G}_{j-1}) \tag{9.12.67}$$

$$= \mathscr{G}_{i+1,j-1}/\mathscr{G}_{i,j-1} \tag{9.12.68}$$

となるが, これは逐次商の列が順序の入れ替えを除いて一致することを意味する. □

9.13 定中心曲率 Hermite 計量の一意性

任意の複素化されたゲージ変換 $\widetilde{g} \in \mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ は, 各点における Cartan 分解によって, 正定値 Hermite 行列値の複素ゲージ変換 g とユニタリなゲージ変換 u の積の形に書ける;

$$\widetilde{g} = g \cdot u, \ g = g^*, \ u \in \mathscr{G}. \tag{9.13.1}$$

ユニタリなゲージ変換 u は接続の同型類を変えないので, $\widetilde{g} = g$ としてよい. (9.7.7) から, このような g によるゲージ変換は

$$\alpha = \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1} \tag{9.13.2}$$

とおいた時に

$$g(A) = A + \alpha^* - \alpha \tag{9.13.3}$$

で与えられる．この時，(9.2.21) より

$$F_{g(A)} = F_A + d_A(\alpha^* - \alpha) + (\alpha^* - \alpha) \wedge (\alpha^* - \alpha) \tag{9.13.4}$$

となる．複素ゲージ群の作用は $\mathscr{A}^{1,1} \subset \mathscr{A}$ の元を $\mathscr{A}^{1,1}$ に移すので，$F_{g(A)}$ は (1,1) 形式である．α および α^* がそれぞれ (0,1) および (1,0) 形式であることから，$F_{g(A)}$ の (2,0) 成分や (0,2) 成分を与える $\partial_A \alpha^*$ や $\alpha \wedge \alpha$ などの項は計算するまでもなくキャンセルするので，

$$F_{g(A)} = F_A + \overline{\partial}_A \alpha^* - \partial_A \alpha - \alpha^* \wedge \alpha - \alpha \wedge \alpha^* \tag{9.13.5}$$

となる．

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \left((\overline{\partial}_A g) g^{-1}\right)^* && (9.13.6)\\
&= (g^{-1})^* \partial_A g^* && (9.13.7)\\
&= g^{-1} \partial_A g && (9.13.8)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
F_{g(A)} - F_A = &\overline{\partial}_A \left(g^{-1} \partial_A g\right) - \partial_A \left((\overline{\partial}_A g) g^{-1}\right)\\
&- g^{-1}\partial_A g \wedge (\overline{\partial}_A g) g^{-1} - (\overline{\partial}_A g) g^{-1} \wedge g^{-1} \partial_A g\\
= &-g^{-1} \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1} \left(\partial_A g\right) + g^{-1} \left(\overline{\partial}_A \partial_A g\right)\\
&- \left(\partial_A \overline{\partial}_A g\right) g^{-1} - \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1} \left(\partial_A g\right) g^{-1}\\
&- g^{-1}\partial_A g \wedge (\overline{\partial}_A g) g^{-1} - (\overline{\partial}_A g) g^{-1} \wedge g^{-1} \partial_A g
\end{aligned} \tag{9.13.9}$$

となる．

補題 9.13.1. $F_{g(A)} = F_A$ であるための必要十分条件は

$$\partial_A \overline{\partial}_A \left(g^2\right) = -\left\{\left(\overline{\partial}_A \left(g^2\right)\right) g^{-1}\right\} \left\{\left(\overline{\partial}_A \left(g^2\right)\right) g^{-1}\right\}^* + [F_A, g]\, g \tag{9.13.10}$$

である．

証明. Leibniz 則を繰り返し使うことによって，(9.13.10) の左辺は

$$\begin{aligned}
&\partial_A \left(\left(\overline{\partial}_A g\right) g + g \left(\overline{\partial}_A g\right)\right)\\
&\quad = \left(\partial_A \overline{\partial}_A g\right) g - \left(\overline{\partial}_A g\right) \left(\partial_A g\right) + \left(\partial_A g\right) \left(\overline{\partial}_A g\right) + g \left(\partial_A \overline{\partial}_A g\right)
\end{aligned}$$

と表される．一方，(9.13.10) の右辺第 1 項の符号を逆にしたものは

$$
\begin{aligned}
&\left(\left\{\left(\overline{\partial}_A g\right) g + g\left(\overline{\partial}_A g\right)\right\} g^{-1}\right)\left(\left\{\left(\overline{\partial}_A g\right) g + g\left(\overline{\partial}_A g\right)\right\} g^{-1}\right)^* \\
&\quad = \left\{\overline{\partial}_A g + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\right\}\left\{\overline{\partial}_A g + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\right\}^* \\
&\quad = \left\{\overline{\partial}_A g + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\right\}\left\{\partial_A g + g^{-1}\left(\partial_A g\right) g\right\} \\
&\quad = \left(\overline{\partial}_A g\right)\left(\partial_A g\right) + \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\left(\partial_A g\right) g \\
&\qquad\quad + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\left(\partial_A g\right) + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-2}\left(\partial_A g\right) g
\end{aligned}
$$

となる．従って，(9.13.10) の左辺から右辺第 1 項を引くと

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_A \overline{\partial}_A g\right) g + \left(\partial_A g\right)\left(\overline{\partial}_A g\right) + g\left(\partial_A \overline{\partial}_A g\right) + \left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\left(\partial_A g\right) g \\
&\qquad + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-1}\left(\partial_A g\right) + g\left(\overline{\partial}_A g\right) g^{-2}\left(\partial_A g\right) g
\end{aligned}
$$

となる．この式に，(9.13.9) の右辺に左右両側から g を掛けて得られる式を加えると，

$$
\left(\left(\partial_A \overline{\partial}_A + \overline{\partial}_A \partial_A\right) g\right) g = [F_A, g]\, g \tag{9.13.11}
$$

を得る． □

ここで，任意の複素行列 $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して

$$
\operatorname{tr}\left(A d\overline{z} \wedge A^* dz\right) = -\operatorname{tr}(AA^*) dz \wedge d\overline{z}, \tag{9.13.12}
$$

$$
\operatorname{tr}\left(AA^*\right) = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \geq 0 \tag{9.13.13}
$$

である事と，

$$
\partial\overline{\partial} \colon \Omega^0(X) \to \Omega^{1,1}(X) \tag{9.13.14}
$$

が X 上の局所座標 $z = x + \sqrt{-1}y$ を用いて

$$
\partial\overline{\partial} f = \left(\partial_z \overline{\partial}_z f\right) dz \wedge d\overline{z} \tag{9.13.15}
$$

$$
= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f dz \wedge d\overline{z} \tag{9.13.16}
$$

で与えられる事に注意しつつ，(9.13.10) の両辺の跡を取って，跡の巡回不変性から来る

$$
\operatorname{tr}\left([F_A, g]\, g\right) = 0 \tag{9.13.17}
$$

と，任意の $\varphi \in \Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ に対して

$$
\partial\overline{\partial} \operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}\left(\partial_A \overline{\partial}_A \varphi\right) \tag{9.13.18}
$$

が成り立つ事を用いると，次の最大値原理 (maximum principle) によって $\tau := \operatorname{tr} g^2$ が定数である事が分かる．

定理 9.13.2 (最大値原理). U を $\mathbb{R}^m$ の領域とし，$(g_{ij})_{i,j=1}^m$ を m 次正定値対称行列に値を取る U 上の C^∞ 関数で，$(h_i)_{i=1}^m$ を U 上の C^∞ 関数とする．この時，U 上の C^∞ 関数 f が不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \tag{9.13.19}$$

を満たし，しかも U の内点で最大値を持つとすると，f は定数である．

最大値原理について，詳しくは例えば [44, 6.4 節] を見よ．任意の複素行列 $A = \left(\overline{\partial}_A g^2\right) g^{-1}$ に対して，$\operatorname{tr}(AA^*) = 0$ は $A = 0$ と同値なので，$\partial\overline{\partial}\tau = 0$ から

$$\left(\overline{\partial}_A g^2\right) g^{-1} = 0 \tag{9.13.20}$$

すなわち

$$\overline{\partial}_A g^2 = 0 \tag{9.13.21}$$

を得る．従って g^2 は $\mathscr{E}$ の正則自己同型を与えるが，$\mathscr{E}$ が安定なので，特に単純であり，g^2 は定数のスカラーでなければならない．従って $A = g(A)$ であり，一意性が示される．

9.14 Hermite 行列のノルム

r 次 Hermite 行列のなす実線形空間を $H = H_r$ と書く．H 上のノルム

$$\nu\colon H \to \mathbb{R}^{\geq 0} \tag{9.14.1}$$

を

$$\nu(M) = \operatorname{tr}\left((M^*M)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{9.14.2}$$

で定義する．

補題 9.14.1. ν は H の通常のノルム

$$\|M\|_H = (\operatorname{tr}(M^*M))^{\frac{1}{2}} \tag{9.14.3}$$

と同値である．

証明．ユニタリ行列 $U \in U(r)$ を用いて $M \in H$ を

$$M = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) U \tag{9.14.4}$$

と対角化すると，

$$\begin{aligned} M^*M &= (U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)U)^*(U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)U) \\ &= U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)UU^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)U \\ &= U^* \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2)U \\ (M^*M)^{\frac{1}{2}} &= U^* \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_r|)U \end{aligned}$$

なので，

$$\nu(M) = \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i|, \tag{9.14.5}$$

$$\|M\|_H = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.14.6}$$

となる．ノルム ν に関する単位球面は，

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_r| = 1 \tag{9.14.7}$$

で定義される．これは $\boldsymbol{\lambda}$ 空間の第 1 象限においては $r-1$ 次元の標準単体であり，全体としてはそれを座標超平面で折り返してできる 2^r 個の図形の和集合である．ノルム ν に関する単位球面はノルム $\|\cdot\|_H$ に関する単位球体にすっぽり含まれるので，任意の $M \in H$ に対して

$$\|M\|_H \leq \nu(M) \tag{9.14.8}$$

となる．一方，ノルム ν とノルム $\|\cdot\|_H$ の差が一番大きくなるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \lambda$ の時で，この時

$$\| \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)\|_H = \sqrt{r}|\lambda|, \tag{9.14.9}$$

$$\nu(\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)) = r|\lambda| \tag{9.14.10}$$

となる．従って，

$$\nu(M) \leq \sqrt{r}\|M\|_H \tag{9.14.11}$$

である． □

$\mathbb{C}^r$ の正規直交基底全体のなす集合を

$$O = \{(e_i)_{i=1}^r \mid (e_i)_{i=1}^r \text{ は } \mathbb{C}^r \text{ の正規直交基底}\} \tag{9.14.12}$$

とおくと，O は自然にユニタリ群 $U(r)$ と同一視される．

補題 9.14.2. 任意の $M \in H$ に対し

$$\nu(M) = \max_{(e_i)_{i=1}^r \in O} \sum_{i=1}^{r} |\langle Me_i, e_i \rangle| \tag{9.14.13}$$

となる．

証明. $\mathbb{C}^r$ の座標を適当に取って，M は対角行列と仮定してよい：

$$M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r). \tag{9.14.14}$$

座標を用いて O の元 $(e_i)_{i=1}^r$ を

$$e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{ir}), \quad i = 1, \ldots, r \tag{9.14.15}$$

と書くと，

$$|\langle Me_i, e_i\rangle| = |\langle(\lambda_1 e_{i1}, \ldots, \lambda_r e_{ir}), (e_{i1}, \ldots, e_{ir})\rangle| \tag{9.14.16}$$

$$= \left|\lambda_1 |e_{i1}|^2 + \cdots + \lambda_r |e_{ir}|^2\right| \tag{9.14.17}$$

$$\leq |\lambda_1||e_{i1}|^2 + \cdots + |\lambda_r||e_{ir}|^2 \tag{9.14.18}$$

$$= \sum_{j=1}^r |\lambda_j||e_{ij}|^2 \tag{9.14.19}$$

なので，

$$\sum_{i=1}^r |\langle Me_i, e_i\rangle| \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r |\lambda_j||e_{ij}|^2 \tag{9.14.20}$$

$$= \sum_{j=1}^r |\lambda_j| \sum_{i=1}^r |e_{ij}|^2 \tag{9.14.21}$$

$$= \sum_{j=1}^r |\lambda_j| \tag{9.14.22}$$

となり，

$$\nu(M) \geq \max_{(e_i)_{i=1}^r \in O} \sum_{i=1}^r |\langle Me_i, e_i\rangle| \tag{9.14.23}$$

である．一方，$(e_i)_{i=1}^r$ として座標基底を取ると

$$\nu(M) = \sum_{i=1}^r |\langle Me_i, e_i\rangle| \tag{9.14.24}$$

が成立するので，

$$\nu(M) \leq \max_{(e_i)_{i=1}^r \in O} \sum_{i=1}^r |\langle Me_i, e_i\rangle| \tag{9.14.25}$$

である． □

補題 9.14.2 から次の系を得る:

系 9.14.3. M が

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{9.14.26}$$

の形のブロック行列の時,

$$\nu(M) \geq |\operatorname{tr} A| + |\operatorname{tr} D| \tag{9.14.27}$$

となる.

証明. $(e_i)_{i=1}^r$ として $\mathbb{C}^r$ の標準基底を取ることによって,

$$\nu(M) \geq \sum_{i=1}^{r} |M_{ii}| = \sum_{i=1}^{r_1} |M_{ii}| + \sum_{i=r_1+1}^{r} |M_{ii}| = |\operatorname{tr} A| + |\operatorname{tr} D| \tag{9.14.28}$$

を得る. □

次の系は (9.14.5) から直ちに従う:

補題 9.14.4. 行列 M の固有値が全て正の時

$$\nu(M) = \operatorname{tr} M \tag{9.14.29}$$

であり, 全て負の時

$$\nu(M) = -\operatorname{tr} M \tag{9.14.30}$$

である.

9.15 安定性から定中心曲率接続へ

この節の目標は次の定理を示す事である:

定理 9.15.1. Riemann 面 X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が安定であれば, 定中心曲率接続を持つ.

$\Gamma(P \times_G \mathfrak{g})$ の元 s に対して

$$N(s) = \left(\int_X \nu(s)^2 d \operatorname{vol}_X \right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.15.1}$$

とおくと, 補題 9.14.1 から, N は L^2 ノルム $\|\cdot\|_{L^2}$ と同値な $L^2(P \times_G \mathfrak{g})$ のノルムに拡張される. 汎関数 $J \colon \mathscr{A}_1^2 \to \mathbb{R}$ を

$$J(A) = N\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} * F_A + \mu \right) \tag{9.15.2}$$

で定義する. この汎関数は明らかに下に有界なので下限を持つ. 下限を与える接続の列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を取ると,

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{L^2} &= \|{*F}\|_{L^2} && (9.15.3)\\
&= 2\pi \left\| \frac{*F}{2\pi\sqrt{-1}} \right\|_{L^2} && (9.15.4)\\
&= 2\pi \left\| \left(\frac{*F}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \right) - \mu \right\|_{L^2} && (9.15.5)\\
&\le 2\pi \left\| \frac{*F}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \right\|_{L^2} + 2\pi\mu && (9.15.6)\\
&\le 2\pi N \left(\frac{*F}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \right) + 2\pi\mu && (9.15.7)
\end{aligned}
$$

から，その曲率の L^2 ノルムは上に有界である．

次の定理は **Uhlenbeck コンパクト性** (Uhlenbeck compactness) と呼ばれ，ゲージ理論の研究では必ず使う基本定理である:

定理 9.15.2 (Uhlenbeck [132, Theorem 1.5])**.** L_1^2 接続の列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対し，その曲率の L^2 ノルムが上に有界であれば，適当な部分列 $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と L_2^2 ゲージ変換の列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$\{g_k(A_{i_k})\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathscr{A}_1^2$ で弱収束する．

定理 9.15.2 から，適当に部分列を取ってゲージ変換を行うことで，下限を与える列は L_1^2 で弱収束すると仮定してよい．従って，次を示せばよい：

1. 弱収束先が $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ 軌道に含まれていなければ，$\mathscr{E}$ が安定でない．
2. 弱収束先が $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ 軌道に含まれていれば，その接続は定中心曲率を持つ．
3. 定中心曲率を持つ L_1^2 接続は，適当な L_2^2 ゲージ変換によって滑らかにできる．

3 は楕円型偏微分方程式論でよく知られた楕円正則性 (elliptic regularity) のゲージ理論における類似であり，やはり Uhlenbeck によって示された：

定理 9.15.3 (Uhlenbeck [Corollary 1.4])**.** L_1^2 接続 A が Yang–Mills 方程式 $D^*F = 0$ を満たせば，適当な L_2^2 ゲージ変換によって C^∞ 級接続にできる．

2 を示すために，次の定理を思い出す:

定理 9.15.4 (Hodge–de Rham–小平)**.** コンパクト多様体 X 上の計量ベクトル束 E_1 および E_2 と，その切断の空間の間の楕円型線形微分作用素 $P\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ が与えられた時，$\operatorname{Ker} P$ および $\operatorname{Ker} P^*$ は共に有限次元であり，任意の $\beta \in (\operatorname{Ker} P^*)^\perp \subset \Gamma(E_2)$ に対し，$P\varphi = \beta$ となる $\varphi \in (\operatorname{Ker} P)^\perp \subset \Gamma(E_1)$ が一意的に存在する．

証明については例えば [135, 6 章] を見よ．これを用いて 2 が示される:

命題 9.15.5. ある $A \in O(\mathscr{E})$ が存在して

$$J(A) = \inf J|_{O(\mathscr{E})} \tag{9.15.8}$$

が成り立つならば，A は定中心曲率接続である．

証明．定理 9.15.4 を $E_1 = E_2 = \operatorname{End} E$ および $P = d_A^* d_A = P^*$ に適用する．P の核は $\mathscr{E}$ の正則自己準同型のなす空間であるが，$\mathscr{E}$ が安定なので，特に単純であり，正則自己準同型は定数のスカラーしかない．従って $\operatorname{Ker} P = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_E$ であるが，

$$\begin{aligned}\int_X \operatorname{tr}\left(2\pi\mu - \sqrt{-1} * F_A\right) &= 2\pi \deg(\mathscr{E}) - \sqrt{-1} \int \operatorname{tr} F_A \\ &= 0\end{aligned} \tag{9.15.9}$$

より，$2\pi\mu - \sqrt{-1} * F_A$ は id_E と直交する．従って，ある $h \in \Gamma(\operatorname{End} E)$ が存在して

$$d_A^* d_A h = 2\pi\mu - \sqrt{-1} * F_A \tag{9.15.10}$$

となる．ここで $t \in \mathbb{C}$ に対し $g = 1 + th$ とおくと，$|t|$ が十分小さければ，これは $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ の元を定める．この時，

$$\partial_A g = t\partial_A h, \quad \overline{\partial}_A g = t\overline{\partial}_A h, \tag{9.15.11}$$

が t の 1 次式である事と，

$$g^{-1} = 1 - th + O(t^2) \tag{9.15.12}$$

である事に注意すると，(9.13.9) から，

$$\begin{aligned}F_{g(A)} - F_A &= \overline{\partial}_A \left(g^{-1}\partial_A g\right) - \partial_A \left((\overline{\partial}_A g)g^{-1}\right) \\ &\qquad - g^{-1}\partial_A g \wedge (\overline{\partial}_A g)g^{-1} - (\overline{\partial}_A g)g^{-1} \wedge g^{-1}\partial_A g \\ &= t\left(\overline{\partial}_A \partial_A - \partial_A \overline{\partial}_A\right) h + O(t^2)\end{aligned} \tag{9.15.13}$$

となる．ここで恒等式

$$\begin{aligned}d_A^* d_A &= \left(\partial_A^* + \overline{\partial}_A^*\right)\left(\partial_A + \overline{\partial}_A\right) \\ &= \partial_A^* \partial_A + \overline{\partial}_A^* \overline{\partial}_A \\ &= \sqrt{-1}[\Lambda, \overline{\partial}_A]\partial_A - \sqrt{-1}[\Lambda, \partial_A]\overline{\partial}_A \\ &= \sqrt{-1}\Lambda\overline{\partial}_A\partial_A - \sqrt{-1}\Lambda\partial_A\overline{\partial}_A \\ &= \sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}_A\partial_A - \partial_A\overline{\partial}_A\right) \\ &= \sqrt{-1} * \left(\overline{\partial}_A\partial_A - \partial_A\overline{\partial}_A\right)\end{aligned}$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
N\left(\frac{*F_{g(A)}}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\right) &= N\left(\frac{*(F_A+t(\overline{\partial}_A\partial_A-\partial_A\overline{\partial}_A)h)}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\right)+O(t^2)\\
&= N\left(\frac{*F_A}{2\pi\sqrt{-1}}-\frac{t}{2\pi}d_A^*d_Ah+\mu\right)+O(t^2)\\
&= N\left(\frac{*F_A}{2\pi\sqrt{-1}}-\frac{t}{2\pi}\left(2\pi\mu-\sqrt{-1}*F_A\right)+\mu\right)+O(t^2)\\
&= N\left(\frac{*F_A}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\right)(1-t)+O(t^2)
\end{aligned}
$$

となる．従って，$J_{g(A)}$ が $t=0$ で最小値を取るためには

$$
\frac{*F_A}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu=0 \tag{9.15.14}
$$

が必要である． □

1 を示すために，少し準備をしよう．正則ベクトル束の完全列

$$
0\to\mathscr{S}\to\mathscr{E}\to\mathscr{Q}\to 0 \tag{9.15.15}
$$

が与えられたとする．C^∞ 級ベクトル束の完全列は必ず分裂するので，$\mathscr{E}$ を C^∞ 級ベクトル束として $\mathscr{S}$ と $\mathscr{Q}$ の直和に分解すると，この分解によって $\mathscr{E}$ のユニタリ接続は

$$
A_{\mathscr{E}}=A(\mathscr{S},\mathscr{Q},\beta)=\begin{pmatrix}A_{\mathscr{S}} & \beta\\ -\beta^* & A_{\mathscr{Q}}\end{pmatrix} \tag{9.15.16}
$$

と表示される．ここで $A_{\mathscr{S}}$ および $A_{\mathscr{Q}}$ はそれぞれ $\mathscr{S}$ と $\mathscr{Q}$ の接続であり，$\beta\in\Omega^{0,1}(\mathscr{Q}^*\otimes\mathscr{S})$ は完全列 (9.15.15) の拡大類

$$
[\beta]\in H^1(\mathscr{Q}^*\otimes\mathscr{S})\cong \mathrm{Ext}^1(\mathscr{Q},\mathscr{S}) \tag{9.15.17}
$$

の代表元である．この時，A の曲率は

$$
\begin{aligned}
F(A_{\mathscr{E}}) &= dA_{\mathscr{E}}+A_{\mathscr{E}}\wedge A_{\mathscr{E}}\\
&= \begin{pmatrix} F(A_{\mathscr{S}})-\beta\wedge\beta^* & d\beta+A_{\mathscr{S}}\wedge\beta+\beta\wedge A_{\mathscr{Q}}\\ -d\beta^*-\beta^*\wedge A_{\mathscr{S}}^*-A_{\mathscr{Q}}^*\wedge\beta^* & F(A_{\mathscr{Q}})-\beta^*\wedge\beta\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.15.18}
$$

で与えられる．ここで $d\beta+A_{\mathscr{S}}\wedge\beta+\beta\wedge A_{\mathscr{Q}}=d_{\mathscr{Q}^*\otimes\mathscr{S}}\beta$ は，$\mathscr{S}$ の接続 $A_{\mathscr{S}}$ と $\mathscr{Q}$ の接続 $A_{\mathscr{Q}}$ が $\mathscr{Q}^*\otimes\mathscr{S}$ に誘導する接続によって β を微分したものである．局所座標を用いて $\beta=Bd\overline{z}$ と表すと，

$$
\beta^*\wedge\beta=B^*Bdz\wedge d\overline{z} \tag{9.15.19}
$$

となるが，B^*B は正定値なので，$\mathscr{Q}^*\otimes\mathscr{S}$ の Hermite 計量 $|\cdot|$ を

$$
*\,\mathrm{tr}\,(\beta^*\wedge\beta)=-2\pi\sqrt{-1}|\beta|^2 \tag{9.15.20}
$$

で定義することができる．この時

$$\beta \wedge \beta^* = BB^* d\bar{z} \wedge dz = -BB^* dz \wedge d\bar{z} \tag{9.15.21}$$

から

$$\operatorname{tr}(\beta \wedge \beta^*) = 2\pi\sqrt{-1}|\beta|^2 \tag{9.15.22}$$

となる．正則ベクトル束の完全列 (9.15.15) に対し，

$$J_0(\mathscr{S}, \mathscr{E}, \mathscr{Q}) := \operatorname{rank} \mathscr{S}(\mu(\mathscr{S}) - \mu(\mathscr{E})) + \operatorname{rank} \mathscr{Q}(\mu(\mathscr{E}) - \mu(\mathscr{Q})),$$
$$J_1(\mathscr{S}, \mathscr{E}, \mathscr{Q}) := \operatorname{rank} \mathscr{S}(\mu(\mathscr{E}) - \mu(\mathscr{S})) + \operatorname{rank} \mathscr{Q}(\mu(\mathscr{Q}) - \mu(\mathscr{E}))$$

とおく．

補題 9.15.6 ([35, Lemma 2])．ベクトル束の完全列

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q} \to 0 \tag{9.15.23}$$

に対し $\mu(\mathscr{S}) \geq \mu(\mathscr{E})$ であれば，$\mathscr{E}$ の任意のユニタリ接続 A に対して

$$J(A) \geq J_0(\mathscr{S}, \mathscr{E}, \mathscr{Q}) \tag{9.15.24}$$

となる．また，(9.15.24) で等号が成立すれば，完全列 (9.15.23) は分裂する．

証明．Hölder の不等式 (9.11.4) で $g = 1$, $p = q = 2$, $r = 1$ とおくと $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$ を得る．これと (9.15.20) から

$$\begin{aligned}
J(A_{\mathscr{E}}) &= \left(\int_X \nu \left(\frac{*F(A_{\mathscr{E}})}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{E}} \right)^2 d\operatorname{vol}_X \right)^{1/2} \\
&\geq \int_X \nu \left(\frac{*F(A_{\mathscr{E}})}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{E}} \right) d\operatorname{vol}_X \\
&\geq \int_X \left\{ \left| \operatorname{tr} \left(\frac{*(F(A_{\mathscr{S}}) - \beta \wedge \beta^*)}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{S}} \right) \right| \right. \\
&\qquad \left. + \left| \operatorname{tr} \left(\frac{*F(A_{\mathscr{Q}} - \beta^* \wedge \beta)}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{Q}} \right) \right| \right\} d\operatorname{vol}_X \\
&\geq \left| \int_X \operatorname{tr} \left(\frac{*(F(A_{\mathscr{S}}) - \beta \wedge \beta^*)}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{S}} \right) d\operatorname{vol}_X \right| \\
&\qquad + \left| \int_X \operatorname{tr} \left(\frac{*F(A_{\mathscr{Q}} - \beta^* \wedge \beta)}{2\pi\sqrt{-1}} + \mu \operatorname{id}_{\mathscr{Q}} \right) d\operatorname{vol}_X \right|
\end{aligned}$$

となる．ここで (9.15.20)，(9.15.22)，積分と跡の加法性，$\operatorname{tr}(\operatorname{id}_{\mathscr{E}}) = \operatorname{rank}(\mathscr{E})$，

$$\int_X \frac{\operatorname{tr} \beta \wedge \beta^*}{2\pi\sqrt{-1}} = \int_X |\beta|^2 = \|\beta\|_{L^2}^2 = -\int_X \frac{\operatorname{tr} \beta^* \wedge \beta}{2\pi\sqrt{-1}}$$

および

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_X \operatorname{tr}(*F(A_{\mathscr{E}}))\, d\operatorname{vol}_X = \deg(\mathscr{E}) \tag{9.15.25}$$

を使うと,

$$\begin{aligned}
&J(A_{\mathscr{E}})\\
&\geq \left|-\deg \mathscr{S} + \operatorname{rank}\mathscr{S}\cdot\mu - \|\beta\|_{L^2}^2\right| + \left|-\deg \mathscr{Q} + \operatorname{rank}\mathscr{Q}\cdot\mu + \|\beta\|_{L^2}^2\right|\\
&= \left|-\operatorname{rank}\mathscr{S}(\mu(\mathscr{S})-\mu) - \|\beta\|_{L^2}^2\right| + \left|\operatorname{rank}\mathscr{Q}(\mu-\mu(\mathscr{Q})) + \|\beta\|_{L^2}^2\right|\\
&= \operatorname{rank}\mathscr{S}(\mu(\mathscr{S})-\mu) + \|\beta\|_{L^2}^2 + \operatorname{rank}\mathscr{Q}(\mu-\mu(\mathscr{Q})) + \|\beta\|_{L^2}^2\\
&= J_0(\mathscr{S},\mathscr{E},\mathscr{Q}) + 2\|\beta\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

を得るが，これから (9.15.24) が直ちに従う．また，等号が成立するためには $\|\beta\|_{L^2}^2 = 0$ すなわち $\beta = 0$ が必要であるが，これは完全列 (9.15.23) が分裂することを意味する． □

補題 9.15.7. ベクトル束の拡大

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q} \to 0 \tag{9.15.26}$$

に対し，$O(\mathscr{E})$ の元の族 $(A(\mathscr{S},\mathscr{Q},t\beta))_{t\in(0,1]}$ は，$t \to 0$ で $O(\mathscr{S}\oplus\mathscr{Q})$ の元 $A(\mathscr{S},\mathscr{Q},0)$ に C^∞ 収束する．

補題 9.15.7 の証明は明らかである．

補題 9.15.8 ([35, Lemma 3]). $\mathscr{E}$ を階数 r の安定ベクトル束とし，階数が r 未満の安定ベクトル束に対しては定中心曲率接続が存在すると仮定する．もし $\mathscr{E}$ が正則ベクトル束 $\mathscr{Q}$ の正則ベクトル束 $\mathscr{S}$ による拡大として得られるなら，$\mathscr{E}$ のユニタリ接続 A が存在して

$$J(A) < J_1(\mathscr{S},\mathscr{E},\mathscr{Q}) \tag{9.15.27}$$

を満たす．

証明. Harder–Narasimhan フィルトレーションと Jordan–Hölder フィルトレーションを併せる事により，$\mathscr{S}$ のフィルトレーション

$$0 = \mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{S}_k = \mathscr{S} \tag{9.15.28}$$

で，全ての $i = 1,\ldots,k$ に対して逐次商 $\mathscr{S}_i/\mathscr{S}_{i-1}$ が安定であり，

$$\mu(\mathscr{S}_1/\mathscr{S}_0) \geq \mu(\mathscr{S}_2/\mathscr{S}_1) \geq \cdots \geq \mu(\mathscr{S}_k/\mathscr{S}_{k-1}) \tag{9.15.29}$$

となるようなものが存在する．また，$\mathscr{S}_1$ は $\mathscr{E}$ の部分束なので，$\mathscr{E}$ の安定性から

$$\mu(\mathscr{E}) > \mu(\mathscr{S}_1) \tag{9.15.30}$$

である．仮定からこれらの逐次商は定中心曲率接続を持つ．ここで補題 9.15.7 を用いると，$O(\mathscr{S})$ の元の族 $(A^t_{\mathscr{S}})_{t\in(0,1]}$ で，$t \to 0$ で $O\left(\bigoplus_{i=1}^k \mathscr{S}_i/\mathscr{S}_{i-1}\right)$

の元 $A^0_{\mathscr{S}}$ に C^∞ 収束するようなものを得る．逐次商の勾配 $\mu(\mathscr{S}_i/\mathscr{S}_{i-1})$ を成分に持つ対角行列を $\Lambda_{\mathscr{S}}$ とおくと，この $A^0_{\mathscr{S}}$ は

$$*F_{A^0_{\mathscr{S}}} + 2\pi\sqrt{-1}\Lambda_{\mathscr{S}} = 0 \tag{9.15.31}$$

を満たす．

同様にして，$\mathscr{Q}$ のフィルトレーション

$$0 = \mathscr{Q}_0 \subset \mathscr{Q}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{Q}_l = \mathscr{Q} \tag{9.15.32}$$

で，$j = 1, \ldots, l$ に対して逐次商 $\mathscr{Q}_j/\mathscr{Q}_{j-1}$ が安定であり，

$$\mu(\mathscr{Q}_1/\mathscr{Q}_0) \geq \mu(\mathscr{Q}_2/\mathscr{Q}_1) \geq \cdots \geq \mu(\mathscr{Q}_l/\mathscr{Q}_{l-1}) \tag{9.15.33}$$

を満たすようなものが存在する．また，$\mathscr{Q}_l/\mathscr{Q}_{l-1}$ は $\mathscr{E}$ の商束でもあるので，$\mathscr{E}$ の安定性から

$$\mu(\mathscr{Q}_l/\mathscr{Q}_{l-1}) > \mu(\mathscr{E}) \tag{9.15.34}$$

となる．ここから，$O(\mathscr{Q})$ の元の族 $(A^t_{\mathscr{Q}})_{t\in(0,1]}$ で，$t \to 0$ で $O\left(\bigoplus_{j=1}^l \mathscr{Q}_j/\mathscr{Q}_{j-1}\right)$ の元 $A^0_{\mathscr{Q}}$ に C^∞ 収束するようなものを得る．逐次商の勾配 $\mu(\mathscr{Q}_j/\mathscr{Q}_{j-1})$ を成分に持つ対角行列を $\Lambda_{\mathscr{Q}}$ とおくと，この $A^0_{\mathscr{Q}}$ は

$$*F_{A^0_{\mathscr{Q}}} + 2\pi\sqrt{-1}\Lambda_{\mathscr{Q}} = 0 \tag{9.15.35}$$

を満たす．$t \in (0,1]$ に対し，拡大

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q} \to 0 \tag{9.15.36}$$

に対応する $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{Q}, \mathscr{S})$ の元の代表元 $\beta_t \in \Omega^{0,1}(\mathscr{Q}^* \otimes \mathscr{S})$ を，$d_t\beta_t = 0$ かつ $\|\beta_t\|_{L^2} = 1$ となるように取る．但し，d_t は $A^t_{\mathscr{S}}$ と $A^t_{\mathscr{Q}}$ が定める $\mathscr{Q}^* \otimes \mathscr{S}$ の接続である．楕円型偏微分作用素 d_t が d_0 に C^∞ 収束するので，d_t に対する楕円評価

$$\|\alpha\|_{L^2_{k+1}} \leq C\left(\|d_t\alpha\|_{L^2_k} + \|\alpha\|_{L^2_k}\right) \tag{9.15.37}$$

において，C は t に依存しないように取れる．$d_t\beta_t = 0$ かつ $\|\beta_t\| = 1$ から，任意の k に対し $\|\beta_t\|_{L^2_k}$ は有界である．ここで Sobolev の埋め込み定理を使うと，β の C^0 ノルムも有界であることが分かる．$s, t \in (0,1]$ に対して

$$A(s,t) = A(A^t_{\mathscr{S}}, A^t_{\mathscr{Q}}, s\beta_t) \tag{9.15.38}$$

とおくと，

$$F_{A(s,t)} = \begin{pmatrix} F_{A^t_{\mathscr{S}}} - s^2\beta_t \wedge \beta_t^* & 0 \\ 0 & F_{A^t_{\mathscr{Q}}} - s^2\beta_t^* \wedge \beta \end{pmatrix} \tag{9.15.39}$$

より

$$\nu\left(\frac{*F_{A(s,t)}}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{E}}\right)=\nu\left(\frac{*\left(F_{A^t_{\mathscr{S}}}-s^2\beta_t\wedge\beta_t^*\right)}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}\right)$$
$$+\nu\left(\frac{*\left(F_{A^t_{\mathscr{Q}}}-s^2\beta_t^*\wedge\beta_t\right)}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{Q}}\right)$$

となる．$t\to 0$ で 0 に収束するような誤差項を $\varepsilon(t)$ と書き，補題 9.14.4 を使うと

$$\nu\left(\frac{*\left(F_{A^t_{\mathscr{S}}}-s^2\beta_t\wedge\beta^*\right)}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}\right) \tag{9.15.40}$$
$$=\nu\left(\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}+\frac{*F_{A^t_{\mathscr{S}}}}{2\pi\sqrt{-1}}-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.41}$$
$$=\nu\left(\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}+\frac{*F_{A^0_{\mathscr{S}}}+\varepsilon(t)}{2\pi\sqrt{-1}}-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.42}$$
$$=\nu\left(\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}+\frac{-2\pi\sqrt{-1}\Lambda_{\mathscr{S}}+\varepsilon(t)}{2\pi\sqrt{-1}}-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.43}$$
$$=\nu\left(\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}-\Lambda_{\mathscr{S}}+\varepsilon(t)-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.44}$$
$$=\mathrm{tr}\left(\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{S}}-\Lambda_{\mathscr{S}}+\varepsilon(t)-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.45}$$
$$=\mathrm{rank}\,\mathscr{S}(\mu-\mu(\mathscr{S}))+\varepsilon(t)-s^2\,|\beta_t|^2, \tag{9.15.46}$$

$$\nu\left(\frac{*\left(F_{A^t_{\mathscr{Q}}}-s^2\beta_t^*\wedge\beta_t\right)}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{Q}}\right) \tag{9.15.47}$$
$$=\nu\left(-\Lambda_{\mathscr{Q}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{Q}}+\varepsilon(t)-s^2\frac{*(\beta_t^*\wedge\beta_t)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.48}$$
$$=-\,\mathrm{tr}\left(-\Lambda_{\mathscr{Q}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{Q}}+\varepsilon(t)-s^2\frac{*(\beta_t^*\wedge\beta_t)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.49}$$
$$=\mathrm{tr}\left(\Lambda_{\mathscr{Q}}-\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{Q}}+\varepsilon(t)-s^2\frac{*(\beta_t\wedge\beta_t^*)}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \tag{9.15.50}$$
$$=\mathrm{rank}\,\mathscr{Q}(\mu(\mathscr{Q})-\mu)+\varepsilon(t)-s^2\,|\beta_t|^2 \tag{9.15.51}$$

を得る．ここから

$$J(A(s,t))^2=\int_X\nu\left(\frac{*F}{2\pi\sqrt{-1}}+\mu\,\mathrm{id}_{\mathscr{E}}\right)^2 d\,\mathrm{vol}_X \tag{9.15.52}$$
$$=\int_X\left(J_1-2s^2|\beta_t|^2+\varepsilon(t)\right)^2 d\,\mathrm{vol}_X \tag{9.15.53}$$

である．β_t の C^0 ノルムが t に関して一様に有界なので，s を十分小さく取れ

ば $s^4\int_X|\beta_t|^4 d\,\mathrm{vol}_X$ は $s^2\int_X|\beta_t|^2 d\,\mathrm{vol}_X = s^2$ よりも小さくなる．従って，s と t を十分小さく取れば $J(A(s,t)) < J_1$ となる． □

補題 9.15.9. $\inf J|_{O(\mathscr{E})}$ を与える弱収束先 $\mathscr{F}$ が $O(\mathscr{E})$ に含まれていない時，

$$\inf J|_{O(\mathscr{F})} \le \inf J|_{O(\mathscr{E})} \tag{9.15.54}$$

かつ

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \neq 0 \tag{9.15.55}$$

が成り立つ．

証明．(9.15.54) は L^2 ノルムの弱収束に関する下半連続性から直ちに従う．$O(\mathscr{E})$ の元の列 $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ の弱収束先を $B \in O(\mathscr{F})$ とおくと，$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は

$$\overline{\partial}_{B,A_0} \colon \Gamma(E^\vee \otimes E) \to \Omega^{0,1}(E^\vee \otimes E) \tag{9.15.56}$$

の核と一致する．ここで $\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}) = 0$ と仮定すると，$\overline{\partial}_{B,A_0}$ は核を持たないので，ある定数 $C_1 > 0$ が存在して，任意の $s \in \Gamma(E \otimes E^\vee)$ に対して楕円評価

$$\left\|\overline{\partial}_{B,A_0} s\right\|_{L^2} \ge C_1 \|s\|_{L^2_1} \tag{9.15.57}$$

が成立する．Sobolev の不等式から，ある定数 $C_2 > 0$ が存在して

$$\|s\|_{L^2_1} \ge C_2 \|s\|_{L^4} \tag{9.15.58}$$

なので，

$$\left\|\overline{\partial}_{B,A_0} s\right\|_{L^2} \ge C_1 C_2 \|s\|_{L^4} \tag{9.15.59}$$

となる．一方，Rellich の定理から $L^2_1 \Subset L^4$ なので，部分列を取り直せば A_i は L^4 ノルムに関して B に収束する．また，$\overline{\partial}_{B,A_0} - \overline{\partial}_{A_i,A_0}$ は $(B - A_i)$ による掛算作用素であり，微分を含まない．従って，

$$\left\|\left(\overline{\partial}_{B,A_0} - \overline{\partial}_{A_i,A_0}\right) s\right\|_{L^2} \le C_3 \|A_i - B\|_{L^4} \|s\|_{L^4} \tag{9.15.60}$$

である．(9.15.59) と (9.15.60) を併せると

$$\left\|\overline{\partial}_{A_i,A_0} s\right\|_{L^2} \ge \left(C_1C_2 - C_3 \|A_i - B\|_{L^4}\right) \|s\|_{L^4} \tag{9.15.61}$$

を得る．A_i が L^4 ノルムに関して B に収束しているので，(9.15.61) から十分大きな i に対して

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E}_{A_i}) = \mathrm{Ker}\,\overline{\partial}_{A_i,A_0} = 0 \tag{9.15.62}$$

となるが，これは $\mathscr{E}_{A_i} \cong \mathscr{E}$ に矛盾する． □

Riemann 面上の 2 つの直線束 $\mathscr{E}$ と $\mathscr{F}$ が 0 でない正則準同型 $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ を持てば $\deg \mathscr{E} \le \deg \mathscr{F}$ となる．しかも，$\deg \mathscr{E} = \deg \mathscr{F}$ となるのは α がどこでも 0 にならない時，すなわち $\mathscr{E}$ と $\mathscr{F}$ が同型である時に限る．従って，補題 9.15.9 から，直線束に対しては $\inf J|_{O(\mathscr{E})}$ を達成する接続が必ず $O(\mathscr{E})$ に存在する．すなわち，任意の正則直線束は定中心曲率接続を持つ．これは Hodge 理論の直接の帰結であり，本質的には命題 9.15.5 で証明されている．

命題 9.15.10. X を Riemann 面とし，階数が $r-1$ 以下の任意の安定ベクトル束は定中心曲率接続を持つとする．この時，X 上の階数 r の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が安定であれば，ある $A \in O(\mathscr{E})$ が存在して $J(A) = \inf J|_{O(\mathscr{E})}$ となる．

証明. 背理法で証明するために，X 上の階数 r の安定な正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，汎関数 J の $O(\mathscr{E})$ における下限を与えるような接続が $O(\mathscr{E})$ に存在しないと仮定する．この時，補題 9.15.9 から，階数 r の正則ベクトル束 $\mathscr{F}$ で，$\deg \mathscr{E} = \deg \mathscr{F}$ かつ

$$\inf J|_{O(\mathscr{E})} \ge \inf J|_{O(\mathscr{F})} \tag{9.15.63}$$

であり，しかも $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \neq 0$ となるようなものが存在する．0 でない $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ の元 α を取って補題 9.12.3 を用いると

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{S}_1 & \longrightarrow & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{Q}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \big\downarrow \alpha & & \big\downarrow \beta & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathscr{Q}_2 & \longleftarrow & \mathscr{F} & \longleftarrow & \mathscr{S}_2 & \longleftarrow & 0 \end{array} \tag{9.15.64}$$

を得る．ここで $\mathrm{rank}\, \mathscr{S}_1 = r_1$，$\mathrm{rank}\, \mathscr{S}_2 = r_2$ とおくと $\mathrm{rank}\, \mathscr{Q}_1 = r_2$，$\mathrm{rank}\, \mathscr{Q}_2 = r_1$ かつ $r = r_1 + r_2$ である．$\deg \mathscr{E} = \deg \mathscr{F}$ かつ $\deg \mathscr{S}_2 \ge \deg \mathscr{Q}_1$ から

$$\mu(\mathscr{E}) = \mu(\mathscr{F}), \quad \mu(\mathscr{S}_2) \ge \mu(\mathscr{Q}_1), \quad \mu(\mathscr{Q}_2) \le \mu(\mathscr{S}_1) \tag{9.15.65}$$

であり，

$$J_1(\mathscr{S}_1, \mathscr{E}, \mathscr{Q}_1) = r_1(\mu(\mathscr{E}) - \mu(\mathscr{S}_1)) + r_2(\mu(\mathscr{Q}_1) - \mu(\mathscr{E})) \tag{9.15.66}$$

$$\le r_1(\mu(\mathscr{F}) - \mu(\mathscr{Q}_2)) + r_2(\mu(\mathscr{S}_2) - \mu(\mathscr{F})) \tag{9.15.67}$$

$$= J_0(\mathscr{S}_2, \mathscr{F}, \mathscr{Q}) \tag{9.15.68}$$

となる．ここで補題 9.15.6 を

$$0 \to \mathscr{S}_2 \to \mathscr{F} \to \mathscr{Q}_2 \to 0 \tag{9.15.69}$$

に適用すると

$$\inf J|_{O(\mathscr{F})} \ge J_0(\mathscr{S}_2, \mathscr{F}, \mathscr{Q}_2) \tag{9.15.70}$$

を得るが，これは補題 9.15.8 を

$$0 \to \mathscr{S}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q}_1 \to 0 \tag{9.15.71}$$

に適用して得られる

$$\inf J|_{O(\mathscr{E})} < J_1(\mathscr{S}_1, \mathscr{E}, \mathscr{Q}_1) \tag{9.15.72}$$

に矛盾する． □

命題 9.15.5 と命題 9.15.10 から定理 9.15.1 が従う．

9.16 直既約定中心曲率接続から安定性へ

定理 9.16.1. 直既約正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が定中心曲率接続を持てば，$\mathscr{E}$ は安定である．

証明. 直既約正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ が安定でなければ，定中心曲率接続を持たないことを示せばよい．$\mathscr{E}$ を安定でない正則ベクトル束とし，

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q} \to 0 \tag{9.16.1}$$

を不安定化列とすると，$\mu(\mathscr{S}) \geq \mu(\mathscr{E})$ より

$$J_0(\mathscr{S}, \mathscr{E}, \mathscr{Q}) \geq 0 \tag{9.16.2}$$

となる．これと補題 9.15.6 から，$\mathscr{E}$ の任意のユニタリ接続 A に対し

$$J(A) \geq J_0(\mathscr{S}, \mathscr{E}, \mathscr{Q}) \geq 0 \tag{9.16.3}$$

であり，しかも等号が成立するには (9.16.1) が分裂する必要がある．定中心曲率接続は $J(A) = 0$ を満たすが，(9.16.1) が分裂すると，$\mathscr{E}$ の直既約性に反する．従って，定理 9.16.1 は証明された． □

第 10 章
正則シンプレクティック多様体

複素多様体 (M, J) とその上の非退化な正則 2 次微分形式 σ の組 (M, J, σ) を正則シンプレクティック多様体と呼ぶ．これはシンプレクティック多様体の複素幾何における対応物である．コンパクトな複素多様体が正則シンプレクティック形式を持つ事は，コンパクトな実多様体がシンプレクティック形式を持つ事よりも遥かに厳しい条件であり，極めて限られた具体例しか知られていない．一方，コンパクト性の仮定を外せば様々な正則シンプレクティック多様体が存在し，その幾つかは場の理論におけるモジュライ空間として現れる重要な空間である．

10.1 既約正則シンプレクティック多様体

シンプレクティック多様体の複素幾何における類似を考える事で，自然に次の定義に導かれる:

定義 10.1.1. $2n$ 次元の複素多様体 X と，その上の正則 2 次微分形式 $\sigma \in H^0\left(\Omega_X^2\right)$ で σ^n がどこでも零にならないようなものの組 (X, σ) を**正則シンプレクティック多様体** (holomorphic symplectic manifold) と呼ぶ．正則シンプレクティック多様体が

(i) X はコンパクトかつ Kähler
(ii) X は単連結
(iii) $H^0\left(\Omega_X^2\right)$ は σ で張られている

という 3 つの条件を満たす時，**既約正則シンプレクティック多様体** (irreducible holomorphic symplectic manifold) と呼ばれる．

正則シンプレクティック多様体 (X, σ) に対し，σ^n は Ω_X^n の自明化を与えるので，X の第 1 Chern 類は零になる．第 1Chern 類が零になる多様体のうち，

任意の $0 < p < \dim X$ に対して $h^0(\Omega_X^p) = 0$ を満たすものを狭義の Calabi–Yau 多様体と呼ぶ．既約正則シンプレクティック多様体はトーラスおよび狭義の Calabi–Yau 多様体と共に，第 1 Chern 類が零の Kähler 多様体の基本的な構成要素を成す:

定理 10.1.2 (Bogomolov 分解 [24])．第 1 Chern 類が零のコンパクト Kähler 多様体 X は，有限次不分岐被覆を取る事で，複素トーラス T，既約正則シンプレクティック多様体 $X_1, \ldots, X_r$ および狭義の Calabi–Yau 多様体 $K_1, \ldots, K_l$ の直積 $T \times X_1 \times \cdots \times X_r \times K_1 \times \cdots K_l$ に置き換えられる．

10.2 4 元数

1805 年にアイルランドの Dublin で生まれた Hamilton は，彼の名を冠して呼ばれる Hamilton 形式の解析力学を創始し，数学と物理学に大きな足跡を残した．しかし，彼自身が生涯最大の業績と考えていたのは 4 元数の発見である．有名な逸話によると，Hamilton は $\mathbb{R}^3$ に体の構造を入れようと長年苦心していたが，1843 年の 10 月 16 日に Dublin の Broom 橋を渡っている時に，$\mathbb{R}^3$ ではなく $\mathbb{R}^4$ を考えれば積の可換性以外の体の公理を全て満たす代数が定義できる事に気付き，興奮して基本関係式

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1 \tag{10.2.1}$$

を橋に刻み込んだ．この故事を記念して，この橋には

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

& cut it on a stone of this bridge.

と記された石盾がはめ込まれている．3 つの元 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ で生成され，基本関係式 (10.2.1) を持つ $\mathbb{R}$ 上の結合代数を Hamilton に因んで $\mathbb{H}$ で表し，その元を **4 元数** (quaternion) と呼ぶ．4 元数代数 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{i} \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{j} \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{k} \tag{10.2.2}$$

をなし，斜体 (skew field) の最も重要な例を与える．$\mathbb{R}$ は $\mathbb{H}$ の中心として自然に $\mathbb{H}$ に埋め込まれるが，$\mathbb{C}$ の自然な $\mathbb{H}$ への埋め込み

$$\mathbb{C} \to \mathbb{H}, \quad a + b\sqrt{-1} \mapsto a + b\boldsymbol{i} \tag{10.2.3}$$

の像は $\mathbb{H}$ の中心ではない．従って，$\mathbb{H}$ への $\mathbb{C}$ の右からの作用と左からの作用は一致せず，$\mathbb{H}$ には 2 種類の自然な $\mathbb{C}$ 線形空間の構造が入る．4 元数の共役

$$x = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \mapsto \overline{x} := -\frac{1}{2}(x + \boldsymbol{i}x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}x\boldsymbol{k}) \tag{10.2.4}$$

$$= a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k} \tag{10.2.5}$$

を用いて，4 元数の実部，虚部およびノルムが

$$\mathfrak{Re}\, x = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) = a, \tag{10.2.6}$$

$$\mathfrak{Im}\, x = \frac{1}{2}(x - \overline{x}) = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}, \tag{10.2.7}$$

$$|x|^2 = x\overline{x} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{10.2.8}$$

で定義される．複素数の場合と異なり，4 元数代数上の代数方程式の解の個数は次数と一致するとは限らない．実際，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の全てが代数方程式

$$x^2 = -1 \tag{10.2.9}$$

を満たす．実は (10.2.9) の解は有限個ですらなく，解の集合は球面

$$S^2 = \{x \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \mid |x| = 1\} \tag{10.2.10}$$

をなす．

任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対して

$$\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x} \tag{10.2.11}$$

なので，4 元数のノルムは乗法的である;

$$|xy| = |x||y|. \tag{10.2.12}$$

従って，$\mathbb{H}$ 内の単位球面

$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\} \tag{10.2.13}$$

は群をなす．部分体 $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ との共通部分として得られる部分群

$$S^1 = S^3 \cap \mathbb{C} \tag{10.2.14}$$

は正規部分群ではない．写像

$$\phi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto x\boldsymbol{i}\overline{x} \tag{10.2.15}$$

による S^3 の像は

$$S^2 = \{x \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \mid |x| = 1\} \tag{10.2.16}$$

で与えられ，任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対し，$\phi(x) = \phi(y)$ となる事と，ある $z \in S^1$ が存在して $x = yz$ となる事は同値である．従って商空間 S^3/S^1 は S^2 と同相であり，写像 $\phi\colon S^3 \to S^2$ は Hopf のファイバー束 (Hopf fibration) を与える．

4 元数環は

$$x = \alpha + \boldsymbol{j}\beta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{10.2.17}$$

によって自然に 2 行 2 列の複素行列環 $M_2(\mathbb{C})$ に埋め込まれる．この埋め込みは Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.2.18}$$

を用いて

$$a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \mapsto a + b\sqrt{-1}\sigma_3 + c\sqrt{-1}\sigma_1 + d\sqrt{-1}\sigma_2 \tag{10.2.19}$$

と書かれる．同様に，n 行 n 列の 4 元数行列環は埋め込み

$$X + \boldsymbol{j}Y \mapsto \begin{pmatrix} X & -\overline{Y} \\ Y & \overline{X} \end{pmatrix} \tag{10.2.20}$$

によって $2n$ 行 $2n$ 列の複素行列環の部分環と同一視される;

$$M_n(\mathbb{H}) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid J_{2n}g = \overline{g}J_{2n}\}. \tag{10.2.21}$$

4 元数行列環とユニタリ群との共通部分

$$U(n, \mathbb{H}) := M_n(\mathbb{H}) \cap U(2n) \subset M_{2n}(\mathbb{C}) \tag{10.2.22}$$

は超ユニタリ群 (hyperunitary group) と呼ばれる．これは複素シンプレクティック群

$$Sp(2n, \mathbb{C}) = \left\{g \in GL(2n, \mathbb{C}) \;\middle|\; g^T J_{2n} g = J_{2n}\right\} \tag{10.2.23}$$

のコンパクト実形 (compact real form) であるコンパクトシンプレクティック群 (compact symplectic group)

$$Sp(n) := U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C}) \tag{10.2.24}$$

と一致する．また，コンパクトシンプレクティック群はユニタリシンプレクティック群 (unitary symplectic group) とも呼ばれ，$USp(n)$ とも表記される．一方，複素 Lie 群 $Sp(2n, \mathbb{C})$ の分裂実形 (split real form) は実シンプレクティック群

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{g \in GL(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; g^T J_{2n} g = J_{2n}\right\} \tag{10.2.25}$$

である．定義から直ちに

$$Sp(1) = S^3 \tag{10.2.26}$$

が分かる．また，この群は $M_2(\mathbb{C})$ の部分集合として $SU(2)$ と一致する．$g \in S^3$ に対し $\mathbb{R}$ 線形写像 $\rho(g)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\rho(g)(x) = gx\overline{g} \tag{10.2.27}$$

で定義すると，これは $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ の元を $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ に移し，$\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ の正定値内積

$$\langle x, y \rangle = \mathfrak{Re}\,(\overline{x}y) \tag{10.2.28}$$

を保つ．従って，ρ は S^3 から $O(3)$ への準同型写像を定める．この準同型写像 ρ の核は $\{\pm 1\} \subset S^3$ で，像は $SO(3)$ になり，S^3 は $SO(3)$ の普遍被覆群 $Spin(3)$ と同一視される．

10.3 超 Kähler 多様体

Kähler 多様体の定義を複素数から 4 元数に拡張する事によって次の定義を得る:

定義 10.3.1. $4n$ 次元の実多様体 M と，M 上の 3 つの複素構造 $I, J, K \in \mathrm{End}(TM)$ で

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\,\mathrm{id}_{TM} \tag{10.3.1}$$

を満たすものの組 (M, I, J, K) を**超複素多様体** (hypercomplex manifold) と呼ぶ．超複素多様体 (M, I, J, K) とその上の Riemann 計量 g の組 (M, I, J, K, g) で，g が 3 つの複素構造の全てに対して Kähler になるようなものを**超 Kähler 多様体** (hyperkähler manifold) と呼ぶ．

$4n$ 次元の Riemann 多様体が超 Kähler 多様体の構造を持つことと，そのホロノミー群が $Sp(n)$ に入ることは同値である．超 Kähler 多様体 (M, I, I, K, g) が与えられた時，3 つの複素構造 I, J および K の対応する Kähler 形式をそれぞれ ω_I, ω_J および ω_K と書く．この時，

$$\sigma_I := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K \tag{10.3.2}$$

は複素多様体 (M, I) 上の正則シンプレクティック形式を与える．Yau [145] による Calabi 予想の解決によって，コンパクトな Kähler 多様体 X 上の正則シンプレクティック形式が与えられた時，Kähler 形式を同じコホモロジー類の中で取り替えることによって，X を超 Kähler 多様体にする事ができる．

既約正則シンプレクティック多様体に対しては，様々な強い主張が成立する: 変形空間は $b_2(X) - 2$ 次元で，必ず非障害的 (unobstructed) になる ([25])．無

限小 Torelli 問題は肯定的であり，周期写像は全射である ([67])．これらの事実から，任意の超 Kähler 多様体は変形して射影代数多様体にできる事が分かる．また，大域的 Torelli 型の定理も成り立つ ([133])．さらに著しい事実として，松下および Hwang による次の結果がある:

定理 10.3.2 ([68], [88], [89])**.** X を射影的な既約正則シンプレクティック多様体とし，$f\colon X \to B$ を射影的正規多様体への固有な全射で，$0 < \dim B < \dim X$ かつ f の一般のファイバーは連結と仮定する．この時，f の一般のファイバーは Lagrange トーラスであり，底空間 B は射影空間になる．

ここで Lagrange トーラスとは，中間次元の Abel 多様体で，正則シンプレクティック形式の制限が消えるようなものを指す．この意味での Lagrange トーラスファイバー束はしばしば代数的完全可積分系と呼ばれる．上の定理は，射影的既約シンプレクティック多様体がファイバー空間の構造を持てば，必ず代数的完全可積分系になるという事を主張している．

このように，X の既約正則シンプレクティック性から様々な強い結論が導かれるが，これは既約正則シンプレクティック性が強い条件である事を物語っている．実際，既約正則シンプレクティック多様体の例を構成するのは極めて難しく，K3 曲面上の層のモジュライ空間か，もしくは一般化された Kummer 多様体に関連した例しか知られていない．

K3 曲面上の安定層のモジュライ空間としての正則シンプレクティック多様体の構成 [99] は，曲線上の安定ベクトル束のモジュライ空間としての実シンプレクティック多様体の構成の，正則シンプレクティック多様体における類似である．モジュライ空間の接空間は $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ で与えられ，その上の対合はカップ積と Poincaré 双対性の代わりに米田積と Serre 双対性を合成した

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \cong \mathrm{Ext}^0(\mathcal{E},\mathcal{E})^* \cong \mathbb{C} \qquad (10.3.3)$$

で与えられる．安定層のモジュライ空間の典型例は，K3 曲面上の点の Hilbert 概型である．

A を Abel 曲面とし，A の加法が定める射 $A^n \to A$ を考える．加法の可換性から，これは対称積からの射 $S^nA \to A$ を誘導する．これを Hilbert–Chow 射 $A^{[n]} \to S^nA$ と合成することによって，A の n 点の Hilbert 概型 $A^{[n]}$ からの射 $A^{[n]} \to A$ を得る．この射による $0 \in A$ の逆像 $K^{(n-1)}A$ は $(n-1)$ 次の一般化された Kummer 多様体 ($(n-1)$-st generalized Kummer variety) と呼ばれ，$2n-2$ 次元の既約正則シンプレクティック多様体になる ([19])．

10.4 超 Kähler 商

コンパクトな例の少なさとは対照的に，コンパクトでない正則シンプレク

ティック多様体や超 Kähler 多様体の例は豊富に存在する．実際，任意の複素多様体に対し，その正則余接束はコンパクトでない正則シンプレクティック多様体の例を与える．超 Kähler 多様体の例を作るのは正則シンプレクティック多様体の例を作るより難しいが，以下に述べるシンプレクティック商の超 Kähler 多様体に対する類似によって，多くの例を構成することができる．

Lie 群 G の超 Kähler 多様体 (M, g, I, J, K) への作用は，3 つの Kähler 形式 ω_I, ω_J 及び ω_K の全てに対して Hamilton 作用になっている時，**超 Hamilton 作用** (hyperhamiltonian action) と呼ぶ．この時の 3 つの運動量写像 μ_I, μ_J, μ_K をまとめて

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_I, \mu_J, \mu_K) \colon M \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \tag{10.4.1}$$

と書き，**超 Kähler 運動量写像** (hyperkähler moment map) と呼ぶ．G は $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用と $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ への自明な作用のテンソル積表現として $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ に作用するが，その作用の固定点集合を $(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H})^G$ で表す．

定理 10.4.1 ([63])**.** Lie 群 G が超 Kähler 多様体 (M, g, I, J, K) への超 Hamilton 作用を持ち，その超 Kähler 運動量写像が

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_I, \mu_J, \mu_K) \colon M \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \tag{10.4.2}$$

で与えられるとする．この時，任意の $\zeta \in (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H})^G$ に対し，G の $\boldsymbol{\mu}^{-1}(\zeta)$ への作用が自由であれば，

$$M /\!\!/\!\!/_{\zeta}\, G := \boldsymbol{\mu}^{-1}(\zeta)/G \tag{10.4.3}$$

は $(\dim M - 4 \dim G)$ 次元の超 Kähler 多様体になる．

10.5 正則シンプレクティックベクトル空間

最も基本的なシンプレクティック多様体はシンプレクティックベクトル空間

$$\left(\mathbb{C}^n, \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z}_i\right) \tag{10.5.1}$$

であるが，この正則シンプレクティック幾何における類似が正則シンプレクティックベクトル空間である．$\mathbb{C}^n$ の元 z, w を用いて $\mathbb{H}^n$ の元を $z + \boldsymbol{j}w$ と書いた時，3 つの Kähler 形式は

$$\omega_I = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n \left(dz_i \wedge d\overline{z}_i + dw_i \wedge d\overline{w}_i\right), \tag{10.5.2}$$

$$\sigma_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dw_i \tag{10.5.3}$$

で与えられる．

10.6 超トーリック多様体

Abel 群の準同型 $\varphi\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ の $(d-n)$ 次元の部分トーラス $K = \ker\varphi \otimes (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を定める．一方，$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ は $\mathbb{C}^d$ に自然な Hamilton 作用

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)\colon z = (z_1, \ldots, z_d) \mapsto t \cdot z = \left(e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_1} z_1, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_d} z_d\right)$$

を持ち，その運動量写像は

$$z \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} |z_i|^2\, e_i \tag{10.6.1}$$

で与えられる．この Hamilton 作用を K に制限することによって，K は $\mathbb{C}^d$ に自然に作用する．この Hamilton 作用に関する $\mathbb{C}^d$ の $\lambda \in \mathfrak{k}^*$ におけるシンプレクティック商 $\mathbb{C}^d /\!\!/_\lambda K$ をシンプレクティックトーリック多様体と呼ぶのであった．

実トーラス $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ のシンプレクティックベクトル空間 $\mathbb{C}^d$ への Hamilton 作用 $z \mapsto t \cdot z$ は，$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ の正則シンプレクティックベクトル空間 $T^*\mathbb{C}^d \cong \mathbb{C}^{2d}$ への超 Hamilton 作用

$$t \cdot (z, w) = \left(t \cdot z,\, t^{-1} \cdot w\right), \tag{10.6.2}$$

を引き起こし，その超運動量写像は

$$\mu_{\mathbb{R}}(z, w) = \mu_1(z, w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \left(|z_i|^2 - |w_i|^2\right) e_i, \tag{10.6.3}$$

$$\mu_{\mathbb{C}}(z, w) = \left(\mu_2 + \sqrt{-1}\mu_3\right)(z, w) = \sum_{i=1}^{d} z_i w_i e_i \tag{10.6.4}$$

で与えられる．$\zeta \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ に対し，この超 Hamilton 作用の K への制限に関する超 Kähler 商

$$Y(\varphi, \zeta) := \mathbb{C}^{2d} /\!\!/\!\!/_\zeta K \tag{10.6.5}$$

は**超トーリック多様体**（hypertoric manifold あるいは toric hyperkähler manifold）と呼ばれる．これは Bielawski–Dancer [22] によって導入され，今野 [78] や Hausel–Sturmfels [60] によってさらに調べられた．超トーリック多様体の解説としては例えば [116] がある．

10.7 箙多様体

箙 (quiver) とは有向グラフのことであり，形式的には

- 頂点 (vertex) の集合 Q_0
- 矢印 (arrow) の集合 Q_1
- 矢印の根本 (source) と先端 (target) を対応させる写像 $s, t\colon Q_1 \to Q_0$

の組 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ として定義される．箙 Q の各頂点 $v\in Q_0$ に複素ベクトル空間 V_v と W_v が割り当てられている時，

$$V=\bigoplus_{a\in Q_1}\mathrm{Hom}(V_{s(a)},V_{t(a)}),\quad W=\bigoplus_{v\in Q_0}\mathrm{Hom}(W_v,V_v) \tag{10.7.1}$$

とおくと，$V\oplus W$ には Lie 群

$$U(V):=\prod_{v\in Q_0}U(V_v) \tag{10.7.2}$$

が自然に

$$B_a\in\mathrm{Hom}(V_{s(a)},V_{t(a)})\mapsto g_{t(a)}\circ B_a\circ g_{s(a)}^{-1}, \tag{10.7.3}$$

$$i_v\in\mathrm{Hom}(W_v,V_v)\mapsto g_v\circ i_v \tag{10.7.4}$$

で作用する．この作用は正則シンプレクティックベクトル空間 $T^*(V\oplus W)$ への超 Hamilton 作用を誘導し，その超 Kähler 運動量写像は

$$\mu_{\mathbb{R}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{a\in Q_1}(B_aB_a^*-B_{\overline{a}}^*B_{\overline{a}})+i_vi_v^*-j_v^*j_v\right)_{v\in Q_0}, \tag{10.7.5}$$

$$\mu_{\mathbb{C}}=\left(\sum_{t(a)=v}\varepsilon B_aB_{\overline{a}}+i_vj_v\right)_{v\in Q_0} \tag{10.7.6}$$

で与えられる．対応する超 Kähler 商は**箙多様体** (quiver variety) と呼ばれるが，これは中島によって ALE 空間上のインスタントンの研究において導入され，幾何学的表現論に応用された [105], [106]．箙として

$$Q_0=\{0,1,\ldots,n\},\quad Q_1=\{1,2,\ldots,n\}, \tag{10.7.7}$$

$$s(i)=i,\quad t(i)=0,\quad i=1,\ldots,n \tag{10.7.8}$$

を，頂点に付随するベクトル空間として

$$V_0=\mathbb{C}^2,\quad V_i=\mathbb{C},\quad i=1,\ldots,n, \tag{10.7.9}$$

$$W_i=0,\quad i=0,\ldots,n \tag{10.7.10}$$

を取った時の箙多様体は**超多角形空間** (hyperpolygon space) と呼ばれる．これは多角形空間の超 Kähler 幾何における類似として今野 [79] によって導入され，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 の安定放物 Higgs 束のモジュライ空間と同型になる事が知られている ([51])．

あとがき

まえがきでも述べたように，当初の計画ではここまでの内容に加えて，シンプレクティック幾何学の関係する話題の中から，数理物理学や超弦理論との関係で近年注目を集めているものを幾つか紹介する予定であったが，紙数の都合で果たせなかった．このあとがきでは，それらについて少しだけコメントしたい．

だがその前に，本文で紹介した内容に関する参考文献を挙げておこう．第2章では解析力学からシンプレクティック幾何学に至る流れを一つの道に沿って辿ったが，読者は解析力学について最小限の知識は予め持っていると仮定した．解析力学を知らない読者がこの章でいきなり解析力学を勉強しようとするのは無謀である．幸いにも，解析力学には易しい本から発展的な本まで様々な教科書や参考書が存在するので，読者は書店や図書館に赴いて，自分の好みに合うものを心ゆくまで探すとよいであろう．定評のある教科書としては，Landau–Lifschitz の理論物理学教程の『力学』を挙げておこう．原著は [85] であるが，邦訳が東京図書から出ている．また，数学の立場からの教科書としては Arnold による『古典力学の数学的方法』[9] があって，邦訳が岩波書店から出ている．

また，多様体の初歩についても読者は既習であると仮定した．多様体は自然な概念であるが，全ての理工系の学生にとって馴染み深いものであるとは言えない．第一の関門は定義で，これは究極的には暗記する他はない．第二の（そして，おそらくは最大の）関門は接空間で，これが分かれば（あるいは少なくとも，分かった気になれば），多様体入門コースの峠は越したと言えよう．接空間の次に来る微分形式は完全反対称テンソルの速記法に過ぎない．入門コースのハイライトは Stokes の定理である．これは微分積分学の基本定理の書き換えに過ぎないのだが，Green の定理，Cauchy の積分定理，Stokes の回転定理，Gauss の発散定理などを特別な場合として含んでいる．微分形式を初めて学ぶ者は，ここで微分形式が如何に便利な記法を与えているかに驚嘆するであろう．また，Stokes の定理は境界作用素と外微分作用素が随伴作用素であることを主張しており，ここから de Rham の定理に自然に繋がる．

多様体に関する基礎事項について纏まって読める文献としては

[森田 05]　森田茂之，『微分形式の幾何学』，岩波書店，2005 年

を挙げておこう．この本はページ数と内容のバランスがとても優れている．一方，初歩的な定義についてより懇切丁寧な説明が欲しい場合には

[松本 88]　松本幸夫，『多様体の基礎』，東京大学出版会，1988 年

を読むのがよいだろう．

多様体論の初歩に関する英語の文献は沢山あるが，評判の良い教科書として Tu [130] を挙げておく．因みに，同じ著者と Bott による共著 [26] は微分形式を用いた代数トポロジーの教科書とし

て有名である．初歩から初めて，中級程度の内容まで書いてある多様体の教科書としては，Warner [135] が定番の一つである．この本の特長としては，層を用いて de Rham の定理を証明している事と，Hodge 理論を証明付きで解説している事が挙げられよう．ただ，層の理論は，その始まりが多変数関数論に由来する事から考えても，複素幾何と併せて勉強した方がよいと思われる．層は極めて有用であるが，抽象度の高い概念であり，最初に学ぶ際の心理的障壁は必ずしも低くない．標準的な内容はどのように勉強しても大差ないが，ここでは Griffith–Harris [54] を挙げておこう．日本語の文献としては，例えば

[小林 05]　小林昭七，『複素幾何』，岩波書店，2005 年

でも層とそのコホモロジーについて簡潔に述べられている．層は実体というよりは言葉なので，具体例なしに一般論を学ぶのは薦められない．

証明付きで Hodge 理論を紹介している本としては他に

[今野 13]　今野宏，『微分幾何学』，東京大学出版会，2013 年

がある．本書で殆ど述べなかった楕円型評価についてもこの本で読める．この本はページ数に比して内容が豊富で，読めば一通りの常識が身に付くであろう．

第 3 章から第 5 章ではシンプレクティック幾何学に関する標準的な話題を取り上げた．シンプレクティック幾何に関して日本語で読める文献と言えば何と言っても

[深谷 08]　深谷賢治，『シンプレクティック幾何学』，岩波書店，2008 年

であろう．この本は 1999 年に書かれた本であるが，後半では当時の最先端の話題を扱った意欲的な本である．また，[今野 13] ではシンプレクティック幾何についても少ないページ数で簡潔に紹介している．英語の文献としては例えば McDuff–Salamon [90] がある．より発展的な話題は同じ著者による [91] で解説されている．また，Cannas da Silva [27] も読みやすい入門書である．

第 6 章で扱った完全可積分系は，シンプレクティック幾何学の一分野というよりは，それ自身が広がりと奥行きを持った独自の分野を成す．完全可積分系は大きく古典可積分系と量子可積分系に分かれ，それぞれが有限自由度のものと無限自由度のものに分かれる．シンプレクティック幾何学が最も直接的に関係するのは有限自由度の古典可積分系であるが，KdV 方程式に代表される無限自由度の可積分系や，XXX 模型に代表される量子可積分系も，シンプレクティック幾何学と様々な関係を持つ．完全可積分系に関する文献は膨大であり，ここでは到底紹介しきれない．第 5 章を書く際には Reyman–Semenov–Tian–Shansky [110] や Audin [13]，それに

[高崎 01]　高崎金久，『可積分系の世界』，共立出版，2001 年

を参考にした．Audin [13] は邦訳が共立出版から出ている．KdV 方程式については

[三伊神 07]　三輪哲二，伊達悦朗，神保道夫，『ソリトンの数理』，岩波書店，2007 年

を挙げておこう．また，Lie 群と Lie 環については

[小大 05] 小林俊行，大島利雄，『リー群と表現論』，岩波書店，2005 年

を，Bruhat 分解については

[寺原 06] 寺田至，原田耕一郎，『群論』，岩波書店，2006 年

を参考にした．

第 7 章で紹介した KAM 理論については，創始者の一人である Arnold による解説が [9] にある．力学系についてより深く学ぶには，

[久矢 06] 久保泉，矢野公一，『力学系』，岩波書店，2006 年

が良い出発点になろう．Birkhoff–Khinchin のエルゴード定理の証明は例えば

[小谷 05] 小谷眞一，『測度と確率』，岩波書店，2005 年

で読むことができる．

第 8 章で扱ったシンプレクティックトーリック多様体についても [今野 13] に解説がある．英語の文献としては Audin [15] を挙げておこう．また，解説記事が Cannas da Silva [28] にある．

代数幾何の観点からトーリック多様体を扱った和書としては，

[小田 85] 小田忠雄，『凸体と代数幾何学』，紀伊国屋書店，1985 年

が古典である．より最近の入門書としては，

[石田 00] 石田正典，『トーリック多様体入門』，朝倉書店，2000 年

がある．英語では Fulton [48] が読み易い．より網羅的な文献として，最近 Cox–Little–Schenck [32] が出版された．

接続や曲率などの，ゲージ理論の基礎を成す概念については

[小林 89] 小林昭七，『接続の微分幾何とゲージ理論』，裳華房，1989 年

に丁寧な解説がある．Uhlenbeck の定理に代表されるようなゲージ理論の解析的な側面については Donaldson–Kronheimer [37] や

[深谷 95] 深谷賢治，『ゲージ理論とトポロジー』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995 年

[橋本 15] 橋本義武，『ゲージ理論の基礎数理』，サイエンス社（臨時別冊・数理科学 SGC–114），2015 年

を参照されたい．

さて，それでは本文で取り上げる事ができなかった発展的な話題について述べよう．第 2 章で取り上げた話題のうち，3 体問題だけは 300 年以上の時を経て，未だに活発に研究されている．最近の論文の例として，Šuvakov–Dmitrašinović [123] と Albers–Frauenfelder–van Koert–Paternain

[4] を挙げておこう．

第 3 章の定理 3.2.4 では，任意のシンプレクティック多様体 M の任意の Lagrange 部分多様体 L に対し，L の M における近傍は T^*L における零切断の近傍とシンプレクティック同相であるという Weinstein の定理を述べた．このような L の近傍に対し，そこに入る任意のコンパクトな完全 Lagrange 部分多様体は M の Hamilton 同相によって L に移せることが Arnold [8] によって予想され，近傍 Lagrange 部分多様体予想 (nearby Lagrangian conjecture) と呼ばれている．この予想に関する最近の発展については，例えば [1], [46], [47], [103], [104] を見よ．

第 4 章で扱った Liouville 領域は，シンプレクティック多様体の基本的な構成要素である．シンプレクティック形式が完全であるという条件はとても強いので，コンパクトなシンプレクティック多様体に比べて，Liouville 領域は遥かに扱い易い．Liouville ベクトル場が外向きであるという条件は，概正則曲線（これは作用汎関数の勾配流である）が境界から外に逃げない事を保証するために用いられる．Liouville 領域に対する基本的な問題は，その中に含まれる完全 Lagrange 部分多様体を分類することである．Liouville 領域を調べるための道具としては，シンプレクティックコホモロジーや巻かれた深谷圏 (wrapped Fukaya category) などがあるが，これについては [111], [121] や [2] を参照されたい．Stein 領域は Liouville 領域の中でも特に性質の良いものであり，多変数関数論における基本的な対象である．多変数関数論に関する教科書は数多くあるが，ここでは

[辻 12] 辻元，『複素多様体論講義』，サイエンス社（臨時別冊・数理科学 SGC–94），2012 年

を挙げておこう．Liouville 領域の境界として現れる接触多様体については，例えば

[三松 01] 三松佳彦，『3 次元接触構造のトポロジー』，日本数学会，2001 年

が日本数学会のホームページからダウンロードできる．

第 5 章で紹介した運動量写像とシンプレクティック商については，幾何学的不変式論 (geometric invariant theory) との関係が重要である．幾何学的不変式論についての基本文献は [100] である．日本語で読める個性的な文献として

[向井 08] 向井茂，『モジュライ理論 1,2』，岩波書店，2008 年

がある．幾何学的不変式論と運動量写像の関係については，例えば

[中島 08] 中島啓，『非線形問題と複素幾何学』，岩波書店，2008 年

の第 6 章に解説がある．

第 8 章の最後で触れた 3 次元の通常 2 重点はコニフォールド (conifold) という別名を持ち，弦の理論家によって繰り返し取り上げられて来た．この特異点から滑らかな空間を作るには少なくとも 3 つの方法がある．特異点解消 (resolution of singularity) をすること，複素構造の変形 (deformation of complex structure) をすること，そして絡み目 (link) を取ることである．

特異点を持つ多様体 X の特異点解消とは，滑らかな多様体 Y からの固有射 $\varphi\colon Y \to X$ で，特異点を除いた集合の上では同型になっているようなものを指す．特異点解消 $\varphi\colon Y \to X$ は，$\varphi^*\omega_X = \omega_Y$ を満たす時クレパント (crepant) と呼ばれる．これは Y が Calabi–Yau 多様体になるための条件で

ある．第 8 章で見たように，3 次元の通常 2 重点はクレパントな特異点解消を持ち，その時の Y は $\mathbb{P}^1$ 上の同義直線束 2 つの直和 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ の全空間で与えられる．

複素構造の変形は定義多項式を変形する事によって得られる．3 次元の通常 2 重点は Morse 型の多項式 (8.4.91) で定義されるが，正数 ϵ を導入してこれを

$$Y_\epsilon := \left\{ (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = \epsilon \right\} \tag{1}$$

と変形できる．$i = 1, 2, 3, 4$ に対して $w_i = a_i + \sqrt{-1} b_i$ とおいて Y_ϵ の定義方程式を実部と虚部に分けると

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = \epsilon, \tag{2}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0 \tag{3}$$

となる．これは，

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \;\; \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \tag{4}$$

とおくと，

$$|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 + \epsilon, \;\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{5}$$

と書き換えられる．特に $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ なので，写像

$$\pi \colon Y_\epsilon \to S^3, \;\; (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{6}$$

が定義される．任意の $\boldsymbol{x} \in S^3$ に対し，この写像のファイバー

$$\pi^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong \left\{ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \right\} \tag{7}$$

は S^3 の $\boldsymbol{x} \in S^3$ における接空間 $T_{\boldsymbol{x}} S^3$ と自然に同一視される．従って，Y_ϵ は S^3 の接束の全空間 TS^3 と同型である．接束が自明な多様体を平行化可能 (parallelizable) と呼ぶのであった．S^3 は Lie 群なので平行化可能であり，従って TS^3 は $S^3 \times \mathbb{R}^3$ と同型である．Y_ϵ に $\mathbb{C}^4$ の Euclid 計量からくる Kähler 構造を入れると，Y_ϵ の実部 $Y_\epsilon \cap \mathbb{R}^4$ は S^3 と同相な Lagrange 部分多様体になる．従って，Weinstein の Lagrange 近傍定理により，Y_ϵ における $Y_\epsilon \cap \mathbb{R}^4$ の近傍は $T^* S^3$ とシンプレクティック同相である．より精密な議論によって，Y_ϵ と $T^* S^3$ がシンプレクティック同相であることを示すこともできる．

原点に孤立特異点を持つ超曲面特異点

$$Y = \{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \mid f(\boldsymbol{z}) = 0 \} \tag{8}$$

に対し，Y と

$$S_\epsilon^{2n-1} = \{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \mid |\boldsymbol{z}| = \epsilon \} \tag{9}$$

の共通部分を Y の絡み目 (link) と呼ぶ．3 次元の通常 2 重点の絡み目は

$$\left\{\boldsymbol{a}+\sqrt{-1}\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^4 \;\middle|\; |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\epsilon/2,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\right\}$$

で与えられる．これは S^3 の単位接束 (unit tangent bundle) と同型であり，S^3 が平行化可能なので $S^3\times S^2$ と微分同相になる．

't Hooft [124] は，結合定数 g を持つ $U(N)$ ゲージ理論において，g^2N を固定したまま N を大きくする極限を取ると，$1/N$ を結合定数とするような弦理論に見える事を指摘した．Maldacena ([86]) はこの't Hooft のアイデアを取り上げ，4 次元で $\mathcal{N}=4$ の超 Yang–Mills 理論の巨大 N 極限が，$AdS_5\times S^5$ 上のⅡB 型超弦理論を与えると予想した．ここで AdS_5 は 5 次元の反 de Sitter 空間 (anti-de Sitter space) である．この予想は AdS/CFT 対応 (AdS/CFT correspondence) と呼ばれ，大きな注目を集めた．AdS/CFT 対応の解説としては例えば Aharony–Gubser–Maldacena–Ooguri–Oz [3] がある．

AdS/CFT 対応において 5 次元の反 de Sitter 空間と直積を取る Riemann 多様体として，5 次元球面 S^5 の代わりに佐々木–Einstein 多様体と呼ばれるより広いクラスの多様体を考えることができる．ここで，Riemann 多様体 (S,g) が佐々木多様体であるとは，その Riemann 錐 $(\mathbb{R}^{>0}\times S,\ dr^2+r^2g)$ が Kähler 多様体になることを指す．Einstein 方程式を満たす佐々木多様体を佐々木–Einstein 多様体と呼ぶ．これは Riemann 錐が Ricci 平坦 Kähler 多様体になる事と同値である．

3 次元の通常 2 重点の絡み目は $(SU(2)\times SU(2))/U(1)$ と同一視することができて，自然な佐々木–Einstein 計量を持つ．ここで，分母の $U(1)$ は $SU(2)$ の極大トーラスを $SU(2)\times SU(2)$ に対角に埋め込んだものである．この佐々木–Einstein 多様体と AdS_5 の直積上の IIB 型超弦理論に双対な 4 次元のゲージ理論は，Klebanov–Witten [75] によって超ポテンシャル

$$\operatorname{tr}(A_1B_1A_2B_2-B_1A_1B_2A_2) \tag{10}$$

を持つ超対称箙ゲージ理論と同定された．

Riemann 錐がトーリック多様体になるような佐々木–Einstein 多様体はトーリック佐々木–Einstein 多様体と呼ばれ，5 次元では $S^2\times S^3$ の幾つかの連結和に微分同相である．トーリック佐々木–Einstein 計量を持ち得る 5 次元多様体の中で，S^5 の次に単純なトポロジーを持つのは $S^2\times S^3$ であるが，これが加算無限個の同型でないトーリック佐々木–Einstein 計量を持つ事が Gauntlett–Martelli–Sparks–Waldram [49] によって示された．この結果が具体的に計量を式で書くことによって証明された事や，この結果によって Cheeger–Tian [29] によって存在しないと予想された非正則 (irregular) と呼ばれるクラスの佐々木–Einstein 多様体が実は存在することが分かった事は注目に値する．トーリック佐々木–Einstein 計量に関しては

[二小 08] 二木昭人，小野肇,『Einstein 計量と GIT 安定性』，数学, Vol. 60, No. 2, pp. 175–202, 2008 年

に日本語で読める概説がある．$(SU(2)\times SU(2))/U(1)$ と超ポテンシャル (10) を持つ 4 次元の超対称箙ゲージ理論との関係は，一般のトーリック佐々木–Einstein 多様体に一般化され，その場合の対応する箙ゲージ理論は，ブレーンタイリング (brane tiling) と呼ばれる組合せ論的な対象を用

いて記述される．この話題については例えば [144] を見よ．このブレーンタイリングは McKay 対応 ([107], [117], [119]) と深い関係がある．

3 次元の Calabi–Yau 多様体 X が与えられた時，それを変形して通常 2 重点を持つ多様体 X_0 を作り，さらにそのクレパントな特異点解消を取ると，新しい Calabi–Yau 多様体 Y ができる．この X と Y の間の関係はコニフォールド転移 (conifold transition) と呼ばれ，ミラー対称性において重要な役割を果たすが，これについては例えば Batyrev–Ciocan–Fontanine–Kim–van Straten [18] を見よ．一方，T^*S^3 の零切断に対する Lagrange 交叉 Floer 理論は S^3 上の Chern–Simons 理論を与える事が Witten [138] によって予想された．こうして得られる S^3 上の Chern–Simons 理論の巨大 N 展開が，3 次元の通常 2 重点のクレパントな特異点解消の Gromov–Witten 不変量を与えるという Gopakumar–Vafa [53] による予想は，その後の Gromov–Witten 理論の発展に大きな影響を与えた．また，コニフォールド転移は，全ての 3 次元 Calabi–Yau 多様体を含む既約なモジュライ空間が存在するという Reid の空想 (Reid's fantasy) [118] にとっても本質的である．

't Hooft [124] のアイデアを用いると，行列模型 (matrix model) の 2 重スケール極限 (double scaling limit) として 2 次元の量子重力理論を定式化することができる．行列模型は直交多項式の方法を使って調べることができ，KdV 方程式との関係が自然に導かれる．この話題については，[141] に優れた解説がある．

一方，2 次元のある種の量子重力理論として，位相的重力理論 (topological gravity) という少し毛色の違う理論が Witten によって導入された ([140])．この理論の相関関数は Riemann 面のモジュライ空間（より正確には，Deligne–Mumford による安定曲線のモジュライ空間）の上の交点数で与えられる．さらに，Witten はこの位相的重力理論が先に議論した量子重力理論と同値であることを予想した ([141])．この予想は，安定曲線のモジュライ空間上の交点数の母関数が KdV 方程式の τ 関数であるという驚異的な予想を導く．これが有名な Witten 予想であり，Kontsevich によって最初に証明された ([80])．この Kontsevich による証明は，

[寺杣 97] 寺杣友秀,『コンツェビッチによるウィッテン予想の解決』, 上智大学数学講究録, No. 40, 1997 年

で読むことができる．また，弦の理論家による解説としては [34] がある．今ではこの定理には，Okounkov–Pandharipande [114] による確率論的な証明や，Kazarian–Lando [73] による ELSV 公式 [43] を使った証明など，様々な証明が知られている．また，Witten 予想は Virasoro 予想と呼ばれる別の予想と同値であるが，Mirzakhani は McShane 恒等式 [92] の一般化 [96] を用いて，Virasoro 予想を直接証明した ([97])．

Witten 予想に現れる安定曲線のモジュライ空間の交点数は，標的空間が一点である場合の Gromov–Witten 不変量と考える事ができるが，Gromov–Witten 不変量は任意のシンプレクティック多様体に対して定義されるので，一般のシンプレクティック多様体に対しても，その Gromov–Witten 不変量の母関数は可積分系と関連する事が期待される．特に $\mathbb{P}^1$ に対しては，同変 Gromov–Witten 不変量の母関数が 2-戸田階層と呼ばれる可積分系の τ 関数になることが Okounkov–Pandharipande [113] によって証明された．また，Virasoro 予想は一般のシンプレクティック多様体に対して定式化され ([42])，トーリック多様体に対しては，2 次の Hamilton 関数の量子化 (quantization of quadratic

Hamiltonian) の理論を用いて Givental [50] によって証明された．この Givental の結果は Teleman [126] によって半単純な量子コホモロジーを持つような任意のシンプレクティック多様体に対して一般化されている．

また，特異点（より正確には，複素多様体とその上の正則関数の組）に対しても Gromov–Witten 理論の類似が存在すると期待されている．これはもともと Witten [143] が提唱したもので，様々な人の貢献を経て，可逆多項式と呼ばれる良いクラスに対しては，Fan–Jarvis–Ruan [45] による解析的な構成や，Polishchuk–Vaintrob [115] による代数的な構成が知られている．単純特異点に対しては，この理論の分配関数は Drinfeld–Sokolov 階層 ([39]) と呼ばれる可積分系の τ 関数を与える．

Kähler 多様体 X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ と実数 μ に対して，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Lambda F_A = \mu \cdot \mathrm{id} \tag{11}$$

が成り立つような接続 $A \in \mathscr{A}^{1,1}$ を $\mathscr{E}$ の **Hermite Yang–Mills 接続** (Hermitian Yang–Mills connection) と呼ぶ．X が Riemann 面の時，Hermite Yang–Mills 接続は定中心曲率接続と一致する．Bianchi の恒等式

$$d_A F_A = \partial_A F_A + \overline{\partial}_A F_A = 0 \tag{12}$$

の $(2,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を取って得られる

$$\partial_A F_A = \overline{\partial}_A F_A = 0 \tag{13}$$

と Kähler 多様体上の Hermite 正則ベクトル束に対する恒等式

$$[\Lambda, \partial_A] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}_A^*, \tag{14}$$

$$[\Lambda, \overline{\partial}_A] = -\sqrt{-1}\partial_A^* \tag{15}$$

から

$$d_A^* F_A = (\partial_A^* + \overline{\partial}_A^*) F_A \tag{16}$$

$$= \sqrt{-1}([\Lambda, \overline{\partial}_A] - [\Lambda, \partial_A]) F_A \tag{17}$$

$$= -\sqrt{-1}(\overline{\partial}_A - \partial_A)\Lambda F_A \tag{18}$$

なので，Hermite Yang–Mills 接続は Yang–Mills 接続である．Kähler 多様体 X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ に対し，$\mathscr{E}$ 上の直既約 Hermite Yang–Mills 接続は，もし存在すれば唯一つで，しかも存在のための必要十分条件は，$\mathscr{E}$ が安定であることである．これは第 9 章の主定理である Narasimhan–Seshadri の定理の一般化であり，射影曲面に対しては Donaldson [36] によって，そして一般の場合には Uhlenbeck–Yau [131] によって証明された．この正則ベクトル束と Hermite Yang–Mills 接続の対応を**小林–Hitchin 対応** (Kobayashi–Hitchin correspondence) と呼ぶ．

Atiyah–Bott [11] や Donaldson [35] と並んで 2 次元のゲージ理論の発展に大きな影響を与えた論文としては，Verlinde [134] や Witten [142] を挙げることができよう．Riemann 面上の安定ベ

クトル束のモジュライ空間は行列式束と呼ばれる自然な正則直線束$\mathcal{L}$を持つ．自然数kに対し，$\mathcal{L}$のk階のテンソル積$\mathcal{L}^k$の正則切断の空間$H^0(\mathcal{L}^k)$は，Wess–Zumino–Witten 模型と呼ばれる2次元の共形場理論におけるレベルkの共形ブロックの空間と同定される．Verlinde ([134]) は共形ブロックの空間が持つ代数的な構造を調べ，その結果として共形ブロックの空間の次元公式を発見した．この Verlinde 公式は代数幾何学者の注目を集め，様々な証明が知られている．Verlinde 公式についての解説記事としては例えば [20] がある．また，日本語で読める文献として [向井 08] と

[上清 08]　上野健爾，清水勇二，『複素構造の変形と周期』，岩波書店，2008 年

を挙げておこう．Verlinde 公式は直線束の正則切断の空間の次元公式であるが，この直線束は高次のコホモロジーを持たないので，正則切断の空間の次元は Euler 数と一致し，Riemann–Roch の定理によって特性類の積分に帰着される．Witten [142] はモジュライ空間上でのより一般の積分の明示公式を与えた．この Witten の公式も Verlinde 公式に劣らず注目を集め，様々な手法で証明されているが，これについては例えば [5], [70], [94], [127] を見よ．

Riemann 面上の階数 2 の安定ベクトル束のモジュライ空間上には，Goldman [52] によって構成された完全可積分系が存在する．この完全可積分系はシンプレクティックトーリック多様体に似ているが，それよりも複雑で奥深い．この完全可積分系の運動量多面体の格子点の数は行列式束の正則切断の次元と一致し，Verlinde 公式によって計算される ([71])．これらの話題に関しては，Audin [14] による解説が読み易い．また，Goldman 系の玩具として，多角形空間のモジュライ空間 (polygon space) の上に屈曲系 (bending system) と呼ばれる完全可積分系が定義される．これは Guillemin–Sternberg [56] によって導入された旗多様体上の Gelfand–Cetlin 系と呼ばれる完全可積分系や，後述する安定放物ベクトル束のモジュライ空間上の Goldman 系と関係が深い．

Riemann 面上の安定ベクトル束のモジュライ空間のシンプレクティック構造を有限次元の枠組みで具体的に記述する問題に関しては多くの研究があるが，その方向での一つの決定的な仕事は Alekseev–Malkin–Meinrenken [6] による Lie 群値運動量写像 (Lie group valued moment map) の理論であろう．これについては，創始者の 1 人である Meinrenken による講義録 [95] がある．

Riemann 面上の安定ベクトル束に対する Narasimhan–Seshadri の定理は Mehta–Seshadri [93] によって点付き Riemann 面上の安定放物ベクトル束の理論に一般化された．これは Riemann 面を軌道体（あるいは Deligne–Mumford スタック）に一般化することに（ほぼ）対応し，パンツ分解 (pair-of-pants decomposition) を用いて Riemann 面上の安定ベクトル束のモジュライ空間を調べる事と深く関わる．また，モノドロミー保存変形のシンプレクティック幾何的な側面を理解する上でも，放物ベクトル束への一般化は本質的である．

$2+1=3$ という恒等式を通して，2 次元のゲージ理論は 3 次元のゲージ理論と結び付く．3 次元では，接続の空間上のゲージ不変な汎関数として，Yang–Mills 汎関数だけでなく Chern–Simons 汎関数

$$S=\int_X\left(\operatorname{tr}\frac{1}{2}A\wedge dA+\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{19}$$

を考えることもできる．この Chern–Simons 汎関数の停留点は平坦接続からなる．Chern–Simons

汎関数を指数の肩に乗せたものを接続のゲージ同値類の空間で積分して得られる位相的場の理論の研究は Witten [139] によって始められた．3 次元多様体が境界を持つ時，境界に対して Hilbert 空間が定まり，経路積分はこの Hilbert 空間の元を与えるが，この Hilbert 空間は境界上の Wess–Zumino–Witten 模型の共形ブロックの空間と同定され，その次元は Verlinde 公式によって与えられる．

Chern–Simons 汎関数は，4=3+1 という等式を通して 4 次元のゲージ理論とも密接に関連する．4 次元の Riemann 多様体上の接続 A は，

$$*F_A = -F_A \tag{20}$$

を満たす時に反自己双対接続と呼ばれる．Bianchi の恒等式から，半自己双対接続は Yang–Mills 接続である．Narasimhan–Seshadri の定理の別証と時期を同じくして，Donaldson は反自己双対接続のモジュライ空間を用いて 4 次元多様体の微分トポロジーを調べる全く新しい手法を開発した．これが所謂 Donaldson 理論である．その結果として，異種微分構造を持つ 4 次元の Euclid 空間 (exotic $\mathbb{R}^4$) の存在が従う．

3 次元多様体 Y に対し，Y 上の Chern–Simons 汎関数の勾配流による軌跡は，4 次元多様体 $Y \times \mathbb{R}$ の dt 成分を持たない反自己双対接続を与える事が Taubes によって観察された．これは，Chern–Simons 汎関数に関する Morse 理論が境界付き 4 次元多様体の Donaldson 理論で重要な役割を果たすことを示唆している．そのような Morse 理論は Floer によって定義され，Y のインスタントン Floer コホモロジーとして知られている．これについては [深谷 95] を見よ．

インスタントン Floer コホモロジーは 3 次元多様体に対して定義される重要なコホモロジー理論であるが，これをある Lagrange 交叉 Floer コホモロジーと同定するのが Atiyah ([12]) と Floer による有名な Atiyah–Floer 予想である．この予想は Floer 理論における中心的な問題の 1 つで，素朴には次のようなものを指す: 任意のコンパクトな 3 次元多様体 Y は，2 つのハンドル体 (handlebody) を境界に沿って貼り合わせたもの

$$Y = H_1 \cup_\Sigma H_2 \tag{21}$$

として実現できることが Morse 理論から容易に分かる．ここで H_1 および H_2 は同相なハンドル体であり，これらの境界に現れる 2 次元多様体を Σ とおくと，貼り合わせ方は Σ の写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma) := \mathrm{Diff}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ の元によって指定される．

G をコンパクト Lie 群として，Σ 上の平坦 G 束のモジュライ空間を $\mathcal{M}(\Sigma)$ とおく．$i = 1, 2$ に対し，ハンドル体 H_i 上の平坦 G 束のモジュライ空間 $\mathcal{M}(H_i)$ は $\mathcal{M}(\Sigma)$ の Lagrange 部分多様体であり，その共通部分は Y 上の平坦 G 束のモジュライ空間 $\mathcal{M}(Y)$ を与える;

$$\mathcal{M}(H_1) \cap \mathcal{M}(H_2) = \mathcal{M}(Y). \tag{22}$$

平坦束のモジュライ空間は可約接続から来る特異点を持つが，その上の Lagrange 交叉 Floer コホモロジーが定義されると大らかに考えることにする．Taubes [125] の仕事から，インスタントン Floer コホモロジーと Lagrange 交叉 Floer コホモロジーの双方が，Euler 数が Casson 不変量と呼ばれる 3 次元多様体の不変量を与えるという意味で Casson 不変量の圏化 (categorification) にな

る．Atiyah–Floer 予想は，これらの 2 つの Floer コホモロジーが同型であることを主張する．部分的な結果としては，Dostoglou–Salamon [38] や Muñoz [101], [102] がある．

コンパクト超 Kähler 多様体に関する概説としては，Huybrechts の教授資格論文 [66] がある．また，Joyce の特殊ホロノミー多様体に関する本 [72] でもコンパクト超 Kähler 多様体について議論している．コンパクトでない正則シンプレクティック多様体に関する概説としては Boalch の講義ノート [23] がある．

コンパクトでない超 Kähler 多様体の例としては ALE 空間が挙げられる．ALE は漸近的に局所ユークリッド的 (asymptotically locally Euclidean) の略である．ALE 空間は Einstein 方程式の解を与えることから，重力インスタントン (gravitational instanton) と呼ばれることもある．

$SL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群を Klein 群と呼ぶ．特に，$SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 Γ が与えられた時，$\mathbb{C}^2/\Gamma$ は孤立特異点を持つ代数多様体であり，その最小特異点解消はクレパントになる．こうして得られる特異点を Klein 特異点と呼ぶ．特に，Γ が巡回群の時，Kronheimer の構成は Gibbons–Hawking と Hitchin が発見した超 Kähler 多様体を与える．第 10 章で紹介した箙多様体は，ALE 空間上の Yang–Mills インスタントンのモジュライ空間として発見された ([83])．

複素多様体 X 上の正則ベクトル束 $\mathscr{E}$ と $H^0(\omega_X \otimes \operatorname{End}\mathscr{E})$ の元 Φ の組 $(\mathscr{E},\Phi)$ を Higgs 束 (Higgs bundle) と呼ぶ．4 次元の Yang–Mills 方程式を 2 次元に次元簡約 (dimensional reduction) する事によって，Riemann 面上の Higgs 束 $(\mathscr{E},\Phi)$ に対する方程式

$$\begin{cases} \overline{\partial}_A \Phi = 0, \\ F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0 \end{cases} \tag{23}$$

を得るが，これについては Hitchin [62] によって以下の事実が知られている．この方程式に対しても小林–Hitchin 型の対応が存在し，対 $(\mathscr{E},\Phi)$ が適当な意味で安定であれば，(23) の解は一意的に存在する．Serre 双対性から

$$H^0(\omega_X \otimes \operatorname{End}\mathscr{E}) \cong \operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})^* \cong T^*_{[\mathscr{E}]}\mathcal{M} \tag{24}$$

なので，安定性を無視すれば，Higgs 束のモジュライ空間 $\mathcal{N}$ は正則ベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の余接束と同一視される．この事が示唆するように，Higgs 束のモジュライ空間は自然な超 Kähler 構造を持つ．Higgs 束のモジュライ空間の上には Hitchin 系 (Hitchin system) と呼ばれる完全可積分系の構造が入る．Hitchin 系は特殊化によって様々な完全可積分系を与え，Seiberg–Witten 理論とも深い関わりを持つのみならず，Langlands 対応においても重要な役割を果たす ([21], [109])．超 Kähler 多様体には S^2 によってパラメトライズされる複素構造の族があるが，このうちの一つは Higgs 束のモジュライ空間を与え，残りは X 上の平坦 $G_\mathbb{C}$ 束のモジュライ空間を与える．

Riemann–Hilbert 対応によって，平坦 $G_\mathbb{C}$ 束のモジュライ空間は正則接続のモジュライ空間と同一視される．正則接続のモジュライ空間に入る正則シンプレクティック構造は，Painlevé 方程式に代表されるようなモノドロミー保存変形の持つ Hamilton 構造の由来になっている．モノドロミー保存変形のシンプレクティック幾何学的な側面については，Hitchin による解説 [64] を見よ．

モノドロミー保存変形は Frobenius 多様体を通してミラー対称性と深く関わる．Frobenius 多様体については，Dubrovin による講義録 [40], [41] や Manin による入門書 [87] がある．ミラー対称

性の入門書としてはCox–Katz[31] が有名であるが，2000 年に Boston の郊外で行われた春の学校の記録 [65] や

[秦泉寺 14] 秦泉寺雅夫，『数物系のためのミラー対称性入門』，サイエンス社（臨時別冊・数理科学 SGC–109），2014 年

もある．

参考文献

[1] Mohammed Abouzaid, *Nearby Lagrangians with vanishing Maslov class are homotopy equivalent*, Invent. Math. **189** (2012), no. 2, 251–313. MR 2947545

[2] Mohammed Abouzaid and Paul Seidel, *An open string analogue of Viterbo functoriality*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 2, 627–718. MR 2602848 (2011g:53190)

[3] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rep. **323** (2000), no. 3-4, 183–386. MR 1743597 (2001c:81134)

[4] Peter Albers, Urs Frauenfelder, Otto van Koert, and Gabriel P. Paternain, *Contact geometry of the restricted three-body problem*, Comm. Pure Appl. Math. **65** (2012), no. 2, 229–263. MR 2855545

[5] A. Alekseev, E. Meinrenken, and C. Woodward, *Group-valued equivariant localization*, Invent. Math. **140** (2000), no. 2, 327–350. MR 1756999 (2001k:53159)

[6] Anton Alekseev, Anton Malkin, and Eckhard Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495. MR MR1638045 (99k:58062)

[7] V. I. Arnol′d, *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 5 (113), 13–40. MR 0163025 (29 #328)

[8] ———, *The first steps of symplectic topology*, Uspekhi Mat. Nauk **41** (1986), no. 6(252), 3–18, 229. MR 890489 (89d:58034)

[9] ———, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. MR 997295 (90c:58046)

[10] M. F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15. MR 642416 (83e:53037)

[11] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615. MR MR702806 (85k:14006)

[12] Michael Atiyah, *New invariants of* 3- *and* 4-*dimensional manifolds*, The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 285–299. MR 974342 (89m:57034)

[13] Michèle Audin, *Spinning tops*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, A course on integrable systems. MR 1409362 (97i:58068)

[14] ———, *Lectures on gauge theory and integrable systems*, Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 488, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 1–48. MR 1461568 (99f:58028)

[15] ———, *Torus actions on symplectic manifolds*, revised ed., Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. MR 2091310 (2005k:53158)

[16] V. V. Batyrev, *Toric Fano threefolds*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), no. 4, 704–717, 927. MR 631434 (82m:14022)

[17] ———, *On the classification of toric Fano* 4*-folds*, J. Math. Sci. (New York) **94** (1999), no. 1, 1021–1050, Algebraic geometry, 9. MR 1703904 (2000e:14088)

[18] Victor V. Batyrev, Ionuţ Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim, and Duco van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians*, Nuclear Phys. B **514** (1998), no. 3, 640–666. MR MR1619529 (99m:14074)

[19] Arnaud Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984). MR 730926 (86c:32030)

[20] ———, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*, Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conf. Proc., vol. 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, pp. 75–96. MR 1360497 (97f:17025)

[21] A. A. Beilinson and V. G. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's fibration and Langlands' program*, Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993), Math. Phys. Stud., vol. 19, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, pp. 3–7. MR 1385674 (97m:14008)

[22] Roger Bielawski and Andrew S. Dancer, *The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), no. 4, 727–760. MR 1792372 (2002c:53078)

[23] Philip Boalch, *Noncompact complex symplectic and hyperkähler manifolds*, preliminary notes for M2 cours spécialisé 2009.

[24] F. A. Bogomolov, *The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class*, Mat. Sb. (N.S.) **93(135)** (1974), 573–575, 630. MR 0345969 (49 #10695)

[25] ———, *Hamiltonian Kählerian manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **243** (1978), no. 5, 1101–1104. MR 514769 (80c:32024)

[26] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. MR 658304 (83i:57016)

[27] Ana Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR 1853077 (2002i:53105)

[28] ———, *Symplectic toric manifolds*, Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems (Barcelona, 2001), Adv. Courses Math. CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 85–173. MR 2000746

[29] Jeff Cheeger and Gang Tian, *On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay*, Invent. Math. **118** (1994),

no. 3, 493–571. MR 1296356 (95m:53051)

[30] Kai Cieliebak, *Symplectic geometry*, Lecture notes for Math 257B, University of Munich.

[31] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048)

[32] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2810322 (2012g:14094)

[33] Thomas Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339. MR 984900 (90b:58069)

[34] Robbert Dijkgraaf, *Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory*, New symmetry principles in quantum field theory (Cargèse, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., vol. 295, Plenum, New York, 1992, pp. 95–158. MR 1204453 (94c:32010)

[35] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 269–277. MR 710055 (85a:32036)

[36] ———, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) **50** (1985), no. 1, 1–26. MR 765366 (86h:58038)

[37] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990, Oxford Science Publications. MR 1079726 (92a:57036)

[38] Stamatis Dostoglou and Dietmar A. Salamon, *Self-dual instantons and holomorphic curves*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), no. 3, 581–640. MR 1283871 (95g:58050)

[39] V. G. Drinfel′d and V. V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, Current problems in mathematics, Vol. 24, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984, pp. 81–180. MR 760998 (86h:58071)

[40] Boris Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., vol. 1620, Springer, Berlin, 1996, pp. 120–348. MR 1397274 (97d:58038)

[41] ———, *Painlevé transcendents in two-dimensional topological field theory*, The Painlevé property, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999, pp. 287–412. MR 1713580 (2001h:53131)

[42] Tohru Eguchi, Kentaro Hori, and Chuan-Sheng Xiong, *Quantum cohomology and Virasoro algebra*, Phys. Lett. B **402** (1997), no. 1-2, 71–80. MR 1454328 (98j:14035)

[43] Torsten Ekedahl, Sergei Lando, Michael Shapiro, and Alek Vainshtein, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. Math. **146** (2001), no. 2, 297–327.

MR 1864018 (2002j:14034)

[44] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)

[45] Huijun Fan, Tyler Jarvis, and Yongbin Ruan, *The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 1, 1–106. MR 3043578

[46] K. Fukaya, P. Seidel, and I. Smith, *The symplectic geometry of cotangent bundles from a categorical viewpoint*, Homological mirror symmetry, Lecture Notes in Phys., vol. 757, Springer, Berlin, 2009, pp. 1–26. MR 2596633 (2011c:53213)

[47] Kenji Fukaya, Paul Seidel, and Ivan Smith, *Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles*, Invent. Math. **172** (2008), no. 1, 1–27. MR 2385665 (2009a:53142)

[48] William Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry. MR MR1234037 (94g:14028)

[49] Jerome P. Gauntlett, Dario Martelli, James Sparks, and Daniel Waldram, *Sasaki-Einstein metrics on $S^2 \times S^3$*, Adv. Theor. Math. Phys. **8** (2004), no. 4, 711–734. MR 2141499 (2006m:53067)

[50] Alexander B. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians*, Mosc. Math. J. **1** (2001), no. 4, 551–568, 645, Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. MR MR1901075 (2003j:53138)

[51] Leonor Godinho and Alessia Mandini, *Hyperpolygon spaces and moduli spaces of parabolic Higgs bundles*, Adv. Math. **244** (2013), 465–532. MR 3077880

[52] William M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. **85** (1986), no. 2, 263–302. MR MR846929 (87j:32069)

[53] Rajesh Gopakumar and Cumrun Vafa, *On the gauge theory/geometry correspondence*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), no. 5, 1415–1443. MR 1796682 (2001k:81272)

[54] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics. MR 507725 (80b:14001)

[55] V. Guillemin and S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 491–513. MR 664117 (83m:58037)

[56] ______, *The Gel′fand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 106–128. MR MR705993 (85e:58069)

[57] ______, *Convexity properties of the moment mapping. II*, Invent. Math. **77** (1984), no. 3, 533–546. MR 759258 (86b:58042a)

[58] Christian Haase and Ilarion V. Melnikov, *The reflexive dimension of a lattice polytope*,

Ann. Comb. **10** (2006), no. 2, 211–217. MR 2258235 (2007j:52015)

[59] G. Harder and M. S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1974/75), 215–248. MR 0364254 (51 #509)

[60] Tamás Hausel and Bernd Sturmfels, *Toric hyperKähler varieties*, Doc. Math. **7** (2002), 495–534 (electronic). MR 2015052 (2004i:53054)

[61] Douglas Hensley, *Lattice vertex polytopes with interior lattice points*, Pacific J. Math. **105** (1983), no. 1, 183–191. MR 688412 (84c:52016)

[62] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 59–126. MR 887284 (89a:32021)

[63] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g:53048)

[64] Nigel Hitchin, *Frobenius manifolds*, Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 488, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, With notes by David Calderbank, pp. 69–112. MR 1461570 (98f:58048)

[65] Kentaro Hori, Sheldon Katz, Albrecht Klemm, Rahul Pandharipande, Richard Thomas, Cumrun Vafa, Ravi Vakil, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, With a preface by Vafa. MR 2003030 (2004g:14042)

[66] Daniel Huybrechts, *Compact hyperkähler manifolds*, Habilitationsschrift, 1997.

[67] ———, *Compact hyper-Kähler manifolds: basic results*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 63–113. MR 1664696 (2000a:32039)

[68] Jun-Muk Hwang, *Base manifolds for fibrations of projective irreducible symplectic manifolds*, Invent. Math. **174** (2008), no. 3, 625–644. MR 2453602 (2010a:14076)

[69] N. V. Ivanov, *Approximation of smooth manifolds by real algebraic sets*, Uspekhi Mat. Nauk **37** (1982), no. 1(223), 3–52, 176. MR 643764 (84i:57029)

[70] Lisa C. Jeffrey and Frances C. Kirwan, *Intersection theory on moduli spaces of holomorphic bundles of arbitrary rank on a Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 1, 109–196. MR 1652987 (2000c:14045)

[71] Lisa C. Jeffrey and Jonathan Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630. MR MR1204322 (94g:58085)

[72] Dominic D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000. MR 1787733 (2001k:53093)

[73] M. E. Kazarian and S. K. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 4, 1079–1089. MR 2328716 (2008d:14055)

[74] Frances Clare Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, vol. 31, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984. MR 766741 (86i:58050)

[75] Igor R. Klebanov and Edward Witten, *Superconformal field theory on threebranes at a Calabi-Yau singularity*, Nuclear Phys. B **536** (1999), no. 1-2, 199–218. MR 1666725 (99k:81253)

[76] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **98** (1954), 527–530. MR 0068687 (16,924c)

[77] ______, *Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, Vol. 1, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957, pp. 315–333. MR 0097598 (20 #4066)

[78] Hiroshi Konno, *Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds*, Internat. J. Math. **11** (2000), no. 8, 1001–1026. MR 1797675 (2001k:53089)

[79] ______, *On the cohomology ring of the hyperKähler analogue of the polygon spaces*, Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000), Contemp. Math., vol. 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 129–149. MR 1953356 (2003k:53111)

[80] Maxim Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 1, 1–23. MR MR1171758 (93e:32027)

[81] Maximilian Kreuzer and Benjamin Nill, *Classification of toric Fano 5-folds*, Adv. Geom. **9** (2009), no. 1, 85–97. MR 2493263 (2010a:14077)

[82] Maximilian Kreuzer and Harald Skarke, *Reflexive polyhedra, weights and toric Calabi-Yau fibrations*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), no. 4, 343–374. MR 1901220 (2003b:14062)

[83] Peter B. Kronheimer and Hiraku Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), no. 2, 263–307. MR 1075769 (92e:58038)

[84] Jeffrey C. Lagarias and Günter M. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, Canad. J. Math. **43** (1991), no. 5, 1022–1035. MR 1138580 (92k:52032)

[85] L. D. Landau and E. M. Lifšic, *Mekhanika*, Theoretical Physics, Vol. I, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1958. MR 0102191 (21 #985)

[86] Juan Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 2, 231–252. MR 1633016 (99e:81204a)

[87] Yuri I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1702284 (2001g:53156)

[88] Daisuke Matsushita, *On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold*, Topology **38** (1999), no. 1, 79–83. MR 1644091 (99f:14054)

[89] ______, *Addendum: "On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold" [Topology* **38** *(1999), no. 1, 79–83; MR1644091 (99f:14054)]*, Topology **40** (2001), no. 2, 431–432. MR 1808227 (2002d:32031)

[90] Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. MR 1698616 (2000g:53098)

[91] ———, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, second ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2954391

[92] Greg McShane, *Simple geodesics and a series constant over Teichmuller space*, Invent. Math. **132** (1998), no. 3, 607–632. MR 1625712 (99i:32028)

[93] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. **248** (1980), no. 3, 205–239. MR 575939 (81i:14010)

[94] E. Meinrenken, *Witten's formulas for intersection pairings on moduli spaces of flat G-bundles*, Adv. Math. **197** (2005), no. 1, 140–197. MR 2166180 (2006d:53108)

[95] Eckhard Meinrenken, *Lectures on group-valued moment maps and Verlinde formulas*, Mathematical aspects of quantization, Contemp. Math., vol. 583, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 175–210. MR 3013094

[96] Maryam Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Invent. Math. **167** (2007), no. 1, 179–222. MR 2264808 (2007k:32016)

[97] ———, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 1, 1–23 (electronic). MR 2257394 (2007g:14029)

[98] J. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **1962** (1962), 1–20. MR 0147741 (26 #5255)

[99] Shigeru Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface*, Invent. Math. **77** (1984), no. 1, 101–116. MR 751133 (85j:14016)

[100] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR MR1304906 (95m:14012)

[101] Vicente Muñoz, *Quantum cohomology of the moduli space of stable bundles over a Riemann surface*, Duke Math. J. **98** (1999), no. 3, 525–540. MR 1695800 (2000f:14091)

[102] ———, *Ring structure of the Floer cohomology of* $\Sigma \times \mathbf{S}^1$, Topology **38** (1999), no. 3, 517–528. MR 1670396 (99m:57028)

[103] David Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 4, 563–619. MR 2565051 (2010m:53131)

[104] David Nadler and Eric Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 233–286. MR 2449059 (2010a:53186)

[105] Hiraku Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416. MR 1302318 (95i:53051)

[106] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3,

515–560. MR 1604167 (99b:17033)

[107] Iku Nakamura, *McKay correspondence*, Groups and symmetries, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 267–298. MR 2500567 (2010i:14019)

[108] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567. MR 0184252 (32 #1725)

[109] Bao Châu Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Invent. Math. **164** (2006), no. 2, 399–453. MR 2218781 (2007k:14018)

[110] S. P. Novikov (ed.), *Dynamical systems. VII*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Integrable systems, nonholonomic dynamical systems, A translation of ıt Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 16 (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1987 [MR0922069 (88g:58004)], Translation by A. G. Reyman [A. G. Reĭman] and M. A. Semenov-Tian-Shansky [M. A. Semenov-Tyan-Shanskiĭ], Translation edited by V. I. Arnol′d and S. P. Novikov. MR 1256257 (94h:58069)

[111] Alexandru Oancea, *A survey of Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology*, Symplectic geometry and Floer homology. A survey of the Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology, Ensaios Mat., vol. 7, Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 2004, pp. 51–91. MR 2100955 (2005i:53116)

[112] Mikkel Øbro, *An algorithm for the classification of smooth fano polytopes*, arXiv:0704.0049.

[113] A. Okounkov and R. Pandharipande, *The equivariant Gromov-Witten theory of* $\mathbf{P}^1$, Ann. of Math. (2) **163** (2006), no. 2, 561–605. MR 2199226 (2006j:14075)

[114] ———, *Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 325–414. MR 2483941 (2009k:14111)

[115] Alexander Polishchuk and Arkady Vaintrob, *Matrix factorizations and cohomological field theories*, arXiv:1105.2903.

[116] Nicholas J. Proudfoot, *A survey of hypertoric geometry and topology*, Toric topology, Contemp. Math., vol. 460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 323–338. MR 2428365 (2010a:14087)

[117] Miles Reid, *McKay correspondence*, alg-geom/9702016.

[118] Miles Reid, *The moduli space of 3-folds with* $K = 0$ *may nevertheless be irreducible*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 329–334. MR 909231 (88h:32016)

[119] ———, *La correspondance de McKay*, Astérisque (2002), no. 276, 53–72, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. MR 1886756 (2003h:14026)

[120] Hiroshi Sato, *Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties*, To-

hoku Math. J. (2) **52** (2000), no. 3, 383–413. MR 1772804 (2001i:14068)

[121] Paul Seidel, *A biased view of symplectic cohomology*, Current developments in mathematics, 2006, Int. Press, Somerville, MA, 2008, pp. 211–253. MR 2459307 (2010k:53153)

[122] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955–1956), 1–42. MR 0082175 (18,511a)

[123] Milovan Šuvakov and V. Dmitrašinović, *Three classes of newtonian three-body planar periodic orbits*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013), no. 11, 114301, 4.

[124] Gerard 't Hooft, *A planar diagam theory for strong interactions*, Nuclear Phys. B **72** (1974), 461–73.

[125] Clifford Henry Taubes, *Casson's invariant and gauge theory*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 2, 547–599. MR 1037415 (91m:57025)

[126] Constantin Teleman, *The structure of 2D semi-simple field theories*, Invent. Math. **188** (2012), no. 3, 525–588. MR 2917177

[127] Constantin Teleman and Christopher T. Woodward, *The index formula for the moduli of G-bundles on a curve*, Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 2, 495–527. MR 2552100 (2011f:58036)

[128] W. P. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), no. 2, 467–468. MR 0402764 (53 #6578)

[129] Aleksy Tralle and John Oprea, *Symplectic manifolds with no Kähler structure*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1661, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR 1465676 (98k:53038)

[130] Loring W. Tu, *An introduction to manifolds*, second ed., Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2723362 (2011g:58001)

[131] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. S, suppl., S257–S293, Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985). MR 861491 (88i:58154)

[132] Karen K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), no. 1, 31–42. MR 648356 (83e:53035)

[133] Misha Verbitsky, *Mapping class group and a global Torelli theorem for hyperkähler manifolds*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 15, 2929–2986, Appendix A by Eyal Markman. MR 3161308

[134] Erik Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nuclear Phys. B **300** (1988), no. 3, 360–376. MR 954762 (89h:81238)

[135] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983, Corrected reprint of the 1971 edition. MR 722297 (84k:58001)

[136] Keiichi Watanabe and Masayuki Watanabe, *The classification of Fano 3-folds with torus embeddings*, Tokyo J. Math. **5** (1982), no. 1, 37–48. MR 670903 (83m:14029)

[137] Alan Weinstein, *Symplectic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), no. 1,

1–13. MR 614310 (83a:58044)

[138] E. Witten, *Chern-Simons gauge theory as a string theory*, The Floer memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 637–678. MR 1362846 (97j:57052)

[139] Edward Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR 990772 (90h:57009)

[140] ______, *On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity*, Nuclear Phys. B **340** (1990), no. 2-3, 281–332. MR 1068086 (91m:32020)

[141] ______, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, pp. 243–310. MR 1144529 (93e:32028)

[142] ______, *Two-dimensional gauge theories revisited*, J. Geom. Phys. **9** (1992), no. 4, 303–368. MR 1185834 (93m:58017)

[143] ______, *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity*, Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), Publish or Perish, Houston, TX, 1993, pp. 235–269. MR 1215968 (94c:32012)

[144] Masahito Yamazaki, *Brane tilings and their applications*, Fortschr. Phys. **56** (2008), no. 6, 555–686. MR 2423955 (2009e:81205)

[145] Shing Tung Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339–411. MR 480350 (81d:53045)

索　引

欧字

マ

ヤ

ラ

著者略歴

植田 一石
うえだ かずし

2006年 京都大学大学院理学研究科修了
博士（理学）
現 在 東京大学大学院数理科学研究科准教授
専門 代数幾何学，シンプレクティック幾何学，数理物理学

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 118
『数物系のための シンプレクティック幾何学入門』
著 者 植田 一石
2015年7月25日 初版発行

数理科学編集部 発行人 木下敏孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで.

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社 TEL.(03)5474–8500(代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25 振替 00170–7–2387 (03)5474–8600(広告部)

組版 (株) ゼロメガ
印刷 (株) シナノ 中澤 眞
製本 (株) 関川製本所 関川安博

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-89：for Senior & Graduate Courses）

弦理論の代数的基礎

環・加群・圏から位相的弦理論，ミラー対称性へ

髙橋　篤史　著

定価 2674 円

本書は，位相的弦理論の代数学的側面に関する入門的な解説書である．環と加群の理論，及び圏論を基礎として，これから位相的弦理論やミラー対称性を学習・研究する際に不可欠になるであろうと思われる定義や定理をまとめた．ゲージ場の量子論，開弦・閉弦，D-brane といった物理的概念との対応も織り交ぜた解説がなされ，数学系，物理系双方の研究者にとって得難い一冊となっている．

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-117：for Senior & Graduate Courses）

幾何学的に理解する
物理数学

園田　英徳　著

定価 2480 円

大学理工系の学部三年生以上を対象に物理数学の基礎事項を図を多く用い解説．最初の４章は高校の数学と物理の知識があれば学部一年生でも読める内容を配する．「ベクトル解析」，「空間の回転」，「微分形式」には特にページを割き，一連の内容を深く理解できるようにしている．幾何学的，視覚的イメージを伴いつつ物理数学の勘所をつかむのに適した記述，構成で，一回学んでよくわからなかったことをもう一度復習し，そのエッセンスを我が物とするにはうってつけの参考書．

サイエンス社